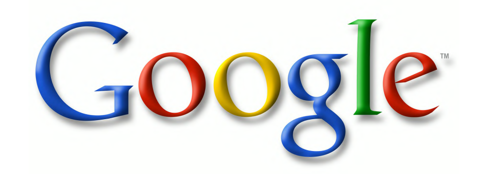


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

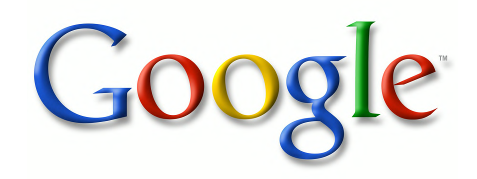
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

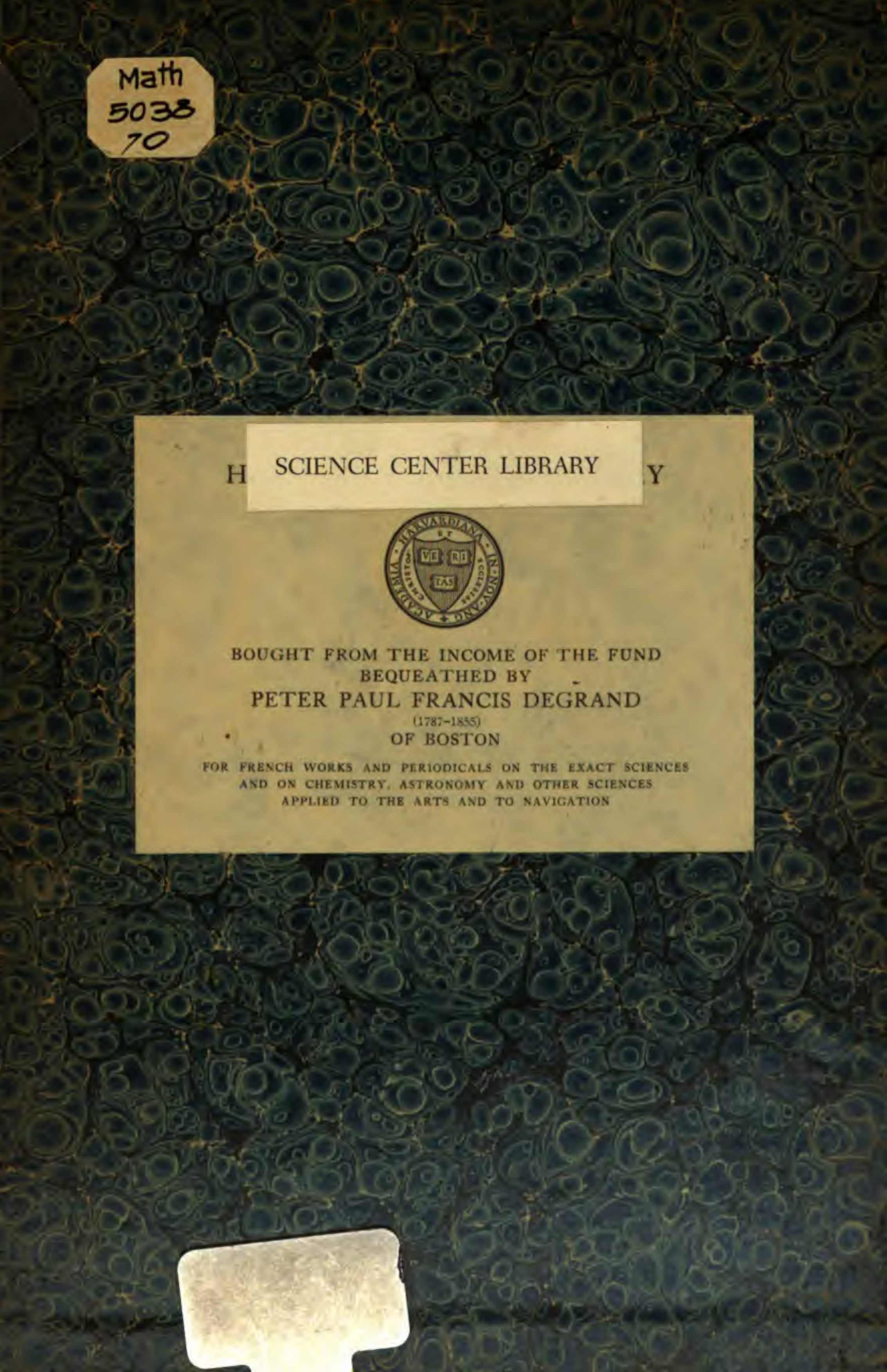
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



Math
5038
70
H
SCIENCE CENTER LIBRARY
Y
BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787-1855)
OF BOSTON
FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION



ESSAI

SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

TOUS DROITS RÉSERVÉS

0

ESSAI

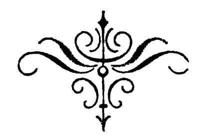
SUR LES

DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

J.-F. BONNEL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ IMPÉRIALE D'ÉDUCATION
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE IMPÉRIAL DE LYON
ETC., ETC., ETC.



PARIS

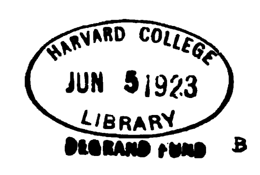
CH. DELAGRAVE ET Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS

78, RUE DES ÉCOLES, 78

—

1870

Math 5038.70



PRÉFACE

Que des hommes puissent se tromper en matière de philosophie, que des savants ne soient pas d'accord sur l'essence des principaux agents de la nature, que des médecins ne s'entendent pas entre eux, il n'y a là rien qui vous étonne.

Mais quand il s'agit de mathématiques, les erreurs sont elles possibles? Est-ce que deux et deux ne font pas quatre pour tout le monde? Ce qui est démontré par A plus B est bel et bien démontré, sans que personne ait rien à y reprendre.

Sans doute, cher lecteur; je suis de votre avis. Cependant les questions litigieuses abondent dans les mathématiques, comme dans toutes les sciences humaines; je ne parle pas de la quadrature du cercle, ni de la trisection de l'angle, qui sont simplement des problèmes difficiles. Mais les questions relatives à l'infini mathématique sont à peine posées; il y a tel

savant qui en a peur, et, parmi les autres, celui qui passe pour le plus fort est tout bonnement le plus habile à les esquiver. Et vous avez dû remarquer, en ouvrant un livre quelconque de mathématiques, cher lecteur, que l'infini se présente en personne, bon gré malgré, dans les premières propositions qui s'y trouvent formulées.

Cette rencontre inattendue de l'infini au début de la science suffit, je pense, à vous faire comprendre comment les erreurs y sont possibles. Vous le comprendrez encore mieux, si vous vous souvenez qu'on a introduit depuis nombre d'années des questions de méthode, d'histoire ou de critique parmi les épreuves sérieuses de l'agrégation des lycées pour les sciences mathématiques. Que si vous doutez après cela, je vous dirai, pour vous convaincre, que parmi les géomètres italiens la discorde vient d'éclater l'an passé, en discussions si vives que leur ministre à Florence s'est vu obligé de décider qu'un seul ouvrage de géométrie élémentaire serait à l'avenir autorisé dans les écoles du royaume, savoir : les *Eléments* d'Euclide. Et ce ministre, quoi qu'en aient dit messieurs les Anglais aurait pu faire un plus mauvais choix.

Le moyen de découvrir ces erreurs et de les éviter, c'est l'attention. Par le temps qui court, l'attention est une des qualités qui manquent le plus dans nos études classiques. Apprendre vite et surtout des choses qui soient utiles dans la vie pratique, voilà la devise de

beaucoup de gens de notre époque. Malheureusement, les deux termes de cette devise sont contradictoires ; car, le moyen d'appliquer utilement des connaissances, c'est de les posséder à fond, et pour les posséder à fond, il faut les avoir acquises lentement. Les esprits médiocres ne peuvent évidemment retirer aucun avantage d'une éducation à la vapeur ; et, si vous êtes intelligent, comme je le suppose, vous emporterez, malgré tout, du collége où le temps vous aura manqué, un tas d'erreurs dont vous tiendrez tôt ou tard à vous débarrasser ; les heures de travail que vous emploierez à vous refaire l'esprit seront une perte de temps, qu'un enseignement plus sage et plus complet aurait pu vous épargner.

Je sais bien que la faute en est aussi imputable à la loi, qui assigne une limite d'âge pour l'admission aux écoles du gouvernement. Cette loi oblige maîtres et élèves à se presser : passé 20 ans, nul ne peut concourir pour l'Ecole Polytechnique, ni pour celle de St-Cyr, sauf une exception en faveur du soldat qui peut se présenter jusqu'à 25 ans.

Il est dificile de se rendre parfaitement compte de la nécessité actuelle d'une semblable mesure, et surtout de l'exception qu'elle comporte. Est-ce une qualité d'être jeune pour un ingénieur? Et cette qualité de jeunesse a-t-elle plus de prix lorsqu'il s'agit du génie civil que lorsqu'il s'agit du génie militaire? Il y a eu, sans doute, d'excellentes raisons à donner pour

le maintien de cette disposition de la loi; mais son origine, je le crains, se rattache à des circonstances exceptionnelles nées d'un régime qui n'existe plus, et les bonnes raisons qu'on a pu autrefois alléguer en sa faveur n'ont à présent, j'en suis convaincu, qu'une importance tout à fait secondaire.

Au lieu de tendre à abréger la durée de l'éducation scolaire, il est urgent de chercher à lui rendre sa plénitude normale et son complet développement. Si vous êtes ministre, retournez donc hardiment la règle, et qu'il soit défendu aux jeunes gens de concourir pour l'école Polytechnique avant d'avoir 20 ans; faites une exception, si l'on tient absolument à ce qu'il y en ait une, pour les candidats qui se destinent à la carrière militaire, et permettez leur (mais seulement à ceux-là) de se présenter à 18 ans.

Vous aurez trouvé ainsi le moyen de laisser parcourir librement à vos élèves les programmes officiels dans toute leur étendue et avec toute la maturité d'esprit désirable. Vous aurez le loisir de leur enseigner, à côté des langues vivantes, le grec et le latin sous toutes leurs formes; vous pourrez, soyez en sûr, abréger impunément la durée des classes, propager les exercices gymnastiques, et faire que le nombre des myopes et des morts n'augmente plus dans vos écoles.

J'ai souffert comme vous, cher lecteur, d'un mauvais état de choses tout fait que nous ont légué nos pères; j'ai mis des années à découvrir telle vérité que

je signale, dans ces pages, à votre attention, et c'est pour alléger votre tâche, autant que pour doubler vos chances de succès, que je me suis décidé à formuler, en règles simples et précises, les idées qui ont présidé à mes recherches.

Autant que possible, j'ai évité le *moi*, comme le recommande Pascal dans les questions de critique, et, si j'ai dû citer des ouvrages avec les noms d'auteur, on reconnaîtra, je l'espère, que c'est plus souvent pour louer que pour blâmer.

Malgré le soin que j'ai pris de ne blesser personne, plusieurs géomètres se croiront directement attaqués dans mon écrit. Qu'ils se rassurent; les erreurs que je relève dans leurs ouvrages et que je combats, ne sont pas nées d'hier. Mais il m'a paru complètement inutile d'aller leur déclarer la guerre dans les œuvres d'Aristote ou de Platon; c'est pourquoi je me suis attaché uniquement à la critique des auteurs modernes.

Au surplus, je ne vise pas haut. Je ne traite la question des définitions géométriques qu'au point de vue excessivement restreint de l'enseignement élémentaire, c'est-à-dire au point de vue de mon expérience personnelle et quotidienne. Ce n'est pas un nouveau traité de logique que je vous soumets, cher lecteur; c'est le sens commun de mes élèves que je vais laisser parler.

CHAPITRE I

Importance des définitions

L'étude de la géométrie occupe en France une si large place dans les programmes de l'Enseignement public, que son importance n'est aujourd'hui contestée par personne. Ce n'est pas, comme plusieurs pourraient le croire, que les vérités théoriques qu'elle propose soient très-utiles en elles-mêmes, ni que les résultats pratiques auxquelles ces vérités aboutissent, soient considérables. L'importance de la géométrie dans l'enseignement classique (1), consiste essentiellement en ce que cette science est, entre toutes les sciences humaines, la plus capable de conduire l'esprit de l'homme à la recherche et à l'amour de la vérité.

L'étude de la géométrie nous invite à la recherche de la vérité, car elle est un modèle parfait de toutes les règles de la logique, en tant qu'elle offre une application continuelle et facile, des lois du raisonnement.

L'étude de la géométrie nous inspire l'amour de la vérité, car elle habitue l'esprit qui s'y livre à se détacher

(1) Voy. les Prog. 3, 4, etc., du *Plan d'Etudes des Lycées*, 1868.

des choses sensibles, en l'appliquant à un objet qui est très-capable de l'occuper tout entier, et qui pourtant n'a rien qui puisse favoriser la pente de l'âme vers les sens.

Combien d'hommes seraient plus réservés dans leurs affirmations philosophiques et morales, s'ils savaient un peu plus de géométrie! Platon inscrivait sur la porte de son école : « Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre. » Et Pascal disait qu'entre deux écrivains on distingue toujours celui qui a de la géométrie. Leibnitz s'écrie aussi : « Sans les mathématiques, on ne pénètre point au fond de la philosophie; sans la philosophie, on ne pénètre point au fond des mathématiques; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien (1). On exigeait, il y a trente ans, que les candidats à l'agrégation de philosophie, fussent bacheliers ès-sciences, et on l'exige encore dorénavant (2); mais ce n'est pas assez. On devrait leur demander quelque chose de plus, et souhaiter que pas un philosophe présent ou futur, n'ait lu et relu vingt fois un traité complet d'algèbre et de géométrie, avant de se mettre à professer et à écrire. On ne verrait plus, comme dans ces dernières années, se produire effrontément, sous forme de définitions mathématiques, des principes de morale individuelle ou sociale, qui n'ont de géométrique que l'apparence et dont la naïveté égale l'outrecuidance.

Pour que l'étude de la géométrie conduise l'esprit d'un pas assuré au double but qui vient d'être indiqué, il ne suffit pas qu'elle contienne un ensemble plus ou moins parfait de vérités qui soient démontrées sans

(1) Voy. Leibnitz, *Nouveaux Essais sur l'Entend.*

(2) Voy. *Bulletin de l'Instruction publique*, n° 207, année 1869.

pétitions de principes, ni cercles vicieux : il ne suffit pas non plus que toutes les propositions, qui se rapportent au même objet, y soient groupées et ordonnées de façon à former des théories bien établies et bien distinctes. Il faut encore, pour que l'esprit puisse profiter autant que possible d'une semblable étude, que toutes les théories y soient enchaînées avec méthode et que cette méthode soit naturelle, c'est-à-dire que les théories les plus simples y soient présentées les premières, et que les plus compliquées trouvent leur place à la suite des premières, sans que, dans aucun cas, les démonstrations soient entachées de fautes contre le raisonnement.

Les vérités géométriques présentées dans un ordre naturel pénètrent aisément dans l'intelligence de l'homme ; en y pénétrant ainsi, elles y produisent peu à peu comme une lumière qui l'éclaire d'une vive clarté, et qui lui permet d'apercevoir sans aucune peine les vérités de détail et d'ensemble les plus difficiles à saisir ; sans compter qu'il est très-utile de s'habituer à ranger toujours ses pensées, quelles qu'elles soient, dans un ordre naturel.

« On peut dire même, avec Pascal, que ce qu'on a su une fois, pour en avoir pénétré la vraie raison, ne se retient pas par mémoire, mais par jugement, et que cela devient tellement propre qu'on ne peut l'oublier ; au lieu que ce qu'on ne sait que par des démonstrations qui ne sont point fondées sur des raisons naturelles, s'échappe aisément, et se retrouve difficilement quand il nous est une fois sorti de la mémoire, parce que notre esprit ne nous donne point de voie pour le retrouver (1). »

Cela explique, en partie, comment il se fait que des

(1) Voy. *Logique de Port-Royal*, 4e partie, chapitre x.

hommes ayant à peine quitté le collége, oublient totalement les vérités théoriques qu'ils y ont apprises, et pourquoi ces mêmes hommes, se retournant à certains moments contre l'Université, se prennent du désir subit d'en changer le régime de fond en comble, et d'y supprimer brusquement tout ce qui ne doit pas laisser de trace sensible dans la vie pratique. Certainement, l'enseignement n'est pas parfait dans le meilleur des colléges; mais tout homme impartial et éclairé, qui voudra s'en enquérir, sera obligé de reconnaître que, tel qu'il est organisé actuellement dans les lycées de France, l'enseignement classique est éminemment propre à développer ces connaissances générales, nécessaires, qui doivent former le fond de toute éducation sérieuse. A une condition, sans doute; à la condition que les études du lycée ne soient pas précipitées, écourtées, escamotées, comme cela arrive souvent, et qu'une année de vraie philosophie leur serve de couronnement.

Les souvenirs d'élève sont ici d'accord avec l'expérience du professeur. En effet, qui ne connaît ce mot d'un élève de l'Ecole polytechnique, aujourd'hui ingénieur des ponts-et-chaussées? Admis très-jeune à l'Ecole et dans un bon rang, il se maintenait dans sa position à force de travail et gémissait des avantages que la nature semblait avoir accordés, sous le rapport de l'esprit, à quelques-uns de ses camarades. « Ah! disait-il, je donnerais volontiers mon titre d'élève et mes deux années d'école, pour une année de philosophie! » Quel magnifique éloge de la philosophie du collége dans ces deux mots!

La première question à résoudre et la plus importante pour arriver à une méthode vraiment naturelle, dans

l'étude de la géométrie, est sans contredit celle des *définitions*. Une bonne définition est pour l'élève une sorte de principe auquel il peut recourir à chaque instant ; c'est un flambeau qui lui permet de suivre un raisonnement dans tous ses détours. Si le principe n'est pas solide, si le flambeau l'éclaire mal, il tombe inévitablement dans l'erreur ; et l'on ne saurait nier qu'il soit plus facile de raisonner juste sur un principe bien établi, que de reconnaître l'excellence de ce principe.

La mauvaise confection des définitions ou leur absence dans les leçons de géométrie, entretient d'ailleurs entre l'élève et le maître une sorte de mésintelligence, qui éclate presque toujours par des confusions étranges, ou par d'incroyables découragements. Avec un peu d'ordre logique et beaucoup de précision dans le choix des définitions, le professeur peut prévenir ces confusions, épargner ces découragements, même aux esprits mous et faibles, dont l'activité sommeille sur les bancs du lycée, et diminuer ainsi singulièrement le nombre des fruits secs de la science, qu'on rencontre encore dans les dernières années d'études classiques.

Sans doute, pour que l'œuvre de l'enseignement soit complète, pour que le triomphe du bien sur le mal soit complètement assuré, les leçons du maître, si raisonnable qu'il soit, ne suffisent pas ; il faut qu'il s'établisse en même temps dans l'âme du jeune homme, un certain ordre moral qui aille en se perfectionnant jusqu'à la fin ; il faut que le développement du cœur marche parallèlement à celui de l'esprit. Ce développement du cœur est dû surtout à l'action de la famille ou de son représentant ; c'est l'éducation proprement dite. L'éducation proprement dite est le complément nécessaire de l'enseignement ; elle lui

vient en aide très-efficacement, sans pouvoir y suppléer, mais aussi sans que rien puisse la remplacer. Il serait à souhaiter que cette vérité fût bien entendue une fois pour toutes, et que chacun sût exactement la part de responsabilité qui lui revient dans la grande question de l'éducation française.

On s'est proposé particulièrement, dans cet Essai, de rechercher et de faire connaître, sous forme de règle, les qualités d'une bonne définition, tant générales que particulières, et d'appliquer cette règle aux principales définitions de la géométrie élémentaire. Ce n'est pas le dernier, mais le premier mot de la question, qu'on peut espérer d'y trouver ; car, il n'est pas douteux que d'autres géomètres pourront, avec autant de facilité et avec plus d'autorité, faire une application semblable de la même méthode aux diverses branches des mathémathiques.

Toutefois il importe, pour bien apprécier les qualités d'une définition géométrique, et pour se rendre parfaitement compte de l'étude élémentaire qu'on en fait ici, d'avoir présentes à l'esprit les notions mêmes de géométrie qu'on acquiert au collége. Ces notions se trouvent résumées dans le chapitre suivant, pour les personnes qui les auraient oubliées : il est clair que la plupart des lecteurs n'auront aucun besoin de jeter les yeux sur ce chapitre.

CHAPITRE II

Géométrie du Collége

La Géométrie du Collége se divise en deux parties : GÉOMÉTRIE PLANE et GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

La 1re partie a pour objet les propriétés de la ligne droite, du cercle, et, en général, celles des figures à deux dimensions. La 2e partie a pour objet les propriétés de quelques figures solides, c'est-à-dire à trois dimensions.

Au XVIIe siècle, on se contentait dans les colléges d'enseigner la 1re partie, c'est-à-dire la géométrie à deux dimensions, et on laissait aux élèves le soin d'étendre aux figures à trois dimensions les propositions démontrées dans la géométrie plane (1). Etait-ce suffisant pour décider les élèves d'alors à apprendre la géométrie dans l'espace? On aurait mauvaise grâce à en douter.

Aujourd'hui les deux parties de la géométrie sont dans l'enseignement classique; seulement la première a été réduite à ce qui est strictement nécessaire pour étudier la seconde, et ce n'est pas un mal. Bien que toutes les

(1) Voy. *Géométrie de Port-Royal*. 40e vol. des œuvres d'Arnaud.

figures de la géométrie soient de pures abstractions. celles qui ont trois dimensions sont plus faciles à concevoir que les autres, puisqu'elles sont plus près de la réalité. L'étude de la géométrie dans l'espace est donc moins abstraite que celle de la géométrie plane; d'où il résulte que le programme actuel de la géométrie élémentaire convient, pour l'enseignement, à beaucoup plus d'esprits que celui de Port-Royal, qui ne s'adressait qu'à un petit groupe d'élèves, complètement préparés d'ailleurs à ces leçons par de longues et fortes études antérieures. La géométrie, grâce à l'introduction de la 2e partie, s'est vulgarisée dans l'enseignement, au moins autant si ce n'est plus que toutes les autres sciences.

« Ce serait un travail intéressant pour l'histoire de la science, disait S.-F. Lacroix, en 1804, que de comparer successivement les traités élémentaires qui ont obtenu dans leur temps un succès marqué, et d'en tirer en quelque sorte la chronologie des propositions. On retrouverait ainsi l'origine de quelques propositions qui ont été oubliées pendant un certain temps, et qui ont reparu depuis comme nouvelles; on apercevrait même quelquefois des pas rétrogrades, parce que la mode ou des circonstances particulières dans la position d'un auteur peuvent, jusqu'à un certain point, donner de la vogue à ses ouvrages, ou les condamner à l'obscurité: les éléments de géométrie fourniraient en ce genre des remarques piquantes. »

Ces remarques piquantes, que Lacroix indiquait en 1804, n'offriraient pas un médiocre intérêt aujourd'hui, l'excessive centralisation du gouvernement tendant de plus en plus à faire de Paris comme le cerveau de la France.

Résumons d'abord la géométrie plane, ainsi réduite au strict nécessaire qu'il faut apprendre pour étudier les figures à trois dimensions.

Géométrie plane.

La logique la plus élémentaire commande dans la géométrie plane deux grandes divisions : celle des *lignes* et celle des *surfaces*.

La première de ces divisions comprend, au point de vue élémentaire, trois *parties :*

1° *Propriétés de la ligne droite, des angles et des parallèles.*

2° *Propriétés de la circonférence du cercle et des figures formées par la rencontre d'une circonférence avec une ligne droite, avec un angle et avec des droites parallèles.*

3° *Propriétés des polygones considérés en eux-mêmes et dans leurs rapports avec le cercle.*

Cette subdivision en trois parties n'a pas toujours obtenu la faveur officielle des programmes; plusieurs tentatives ont été faites pour mener de front, et dès le début, l'étude de la ligne droite et celle du cercle (1). Heureusement ces tentatives ont échoué.

Sans doute, les propriétés élémentaires de la circonférence du cercle sont aussi simples que celles de la ligne droite, et elles peuvent se démontrer directement, c'est-à-dire indépendamment de celles de la ligne droite. Mais est-ce une raison suffisante pour placer au début de la

(1) Voy. *Program. officiels* de 1854, classe de logique.

science, et comme sur le même plan, l'étude de la circonférence qui, en définitive, est une ligne courbe, et celle de la ligne droite?

Ne semble-t-il pas résulter aussi de l'étude comparative de la ligne droite et du cercle, que l'une est essentielle à l'autre jusque dans les premières propositions de la géométrie, tandis qu'il n'en est rien? Qui ne sait que les propriétés élémentaires de la ligne droite, des angles et des parallèles, sont tout à fait indépendantes de celles du cercle? Il est donc naturel de commencer la géométrie par l'étude de la ligne droite, et on doit s'attacher à dégager cette étude, autant que possible, de toute considération étrangère de ligne courbe. C'est tout à fait contraire à la véritable méthode, dit l'auteur de la logique de Port-Royal, que de se servir du plus composé pour expliquer le plus simple.

Il faut reconnaître que les partisans de cette réforme ont eu une très-louable intention, celle de simplifier la théorie des angles, qui passe pour difficile. Mais on ne doit pas oublier qu'il n'y a aucune corrélation naturelle entre les propriétés des angles et celles des arcs interceptés par les côtés de ces angles. Lorsque, dès la première leçon, on limite un angle par un arc dans le sens où son étendue est indéfinie, comme l'avait proposé d'Alembert (1), on dispense l'élève de concevoir ce que c'est qu'un espace angulaire au delà de l'arc décrit du sommet comme centre; on se débarrasse ainsi immédiatement de la difficulté qu'on rencontre au début, cela est vrai. Mais quel est l'esprit qui a jamais trouvé une difficulté à concevoir, et à concevoir aussi bien que ceux qui le conçoi-

(1) Voy. d'Alembert. — *Encyclopédie du XVIII*[e] *siècle.*

vent le mieux, ce que c'est qu'un espace indéfini compris entre le sommet d'un angle et les deux côtés de cet angle? S'il y a une difficulté pour quelqu'un, elle est tout entière dans l'idée même de la ligne droite, qu'on définit par deux de ses points, et qu'on suppose toujours prolongée indéfiniment dans un sens et dans l'autre (car il n'y a pas un professeur qui ne se hâte d'en compléter la définition par cette extension donnée au mot de ligne droite). C'est donc en quelque sorte une puérilité, après avoir ainsi défini et expliqué la ligne droite, que de vouloir restreindre la signification du mot *angle* à l'espace compris entre son sommet, ses côtés et un arc : la difficulté est dissimulée aux yeux de l'élève, mais elle n'est pas vaincue, car l'élève qui ne voit pas la difficulté n'a pu la comprendre.

Il est bon de remarquer, au contraire, que l'idée d'infini se présente tout d'abord et d'une manière nécessaire dans les trois premières théories élémentaires de la géométrie, sous la triple forme de ligne droite, d'espace angulaire et d'espace parallèle (1). « Je ne vois, comme disait Pascal, que des infinis de toutes parts. » Et vouloir que cette idée soit écartée ou disparaisse complètement des premiers éléments de la géométrie, c'est tenter l'impossible.

La seconde division de la géométrie plane comprend aussi trois parties, au point de vue élémentaire:

1° *Aire d'une figure polygonale.*

2° *Aire d'une figure circulaire.*

(1) Le terme d'*espace parallèle* était employé au XVII[e] siècle dans l'enseignement classique, pour désigner l'espace compris entre deux droites parallèles ; ce mot a été abandonné depuis, sans qu'on sache pourquoi.

3° *Aire d'une figure mixtiligne, c'est-à-dire terminée de toutes parts par des lignes droites ou circulaires.*

Mais ces trois dernières parties peuvent aisément être réunies en une seule, comme étant, au point de vue purement élémentaire, moins considérables que les autres. On arrive ainsi à la division générale de la géométrie plane en *quatre parties* ou QUATRE LIVRES, division qui est très-ancienne et qui est à peu près identique avec celle des programmes officiels.

Cette division est naturelle, et doit être soigneusement conservée; tandis que toute division artificielle de la géométrie en LEÇONS ou par NUMÉROS, doit être sévèrement rejetée de l'enseignement classique (1).

Géométrie dans l'espace.

La géométrie dans l'espace comprend *trois parties* ou TROIS LIVRES:

1° *Propriétés du plan et de la ligne droite, des angles dièdres et des trièdres.*

2° *Propriétés des figures polyèdrales: prismes, pyramides, etc.*

3° *Propriétés des corps ronds: cylindre, cône et sphère.*

Cette division est conforme aux programmes officiels et à la nature des choses. Il y a trente ans, l'étude des propriétés de la sphère était assez développée dans les classes pour qu'on en fit UN LIVRE à part; il y avait ainsi HUIT LIVRES dans la géométrie du collége; aujourd'hui,

(1) Voy. Les *Programmes officiels* du plan d'études en 1854, et toutes les géométries malheureusement conformes à ces programmes.

grâce à la simplification de l'étude de la sphère, il y a un livre de moins, et l'on n'a plus en tout que SEPT LIVRES de géométrie à apprendre au collége.

Quant à l'ordre qu'il convient de suivre dans la subdivision de ces SEPT LIVRES de géométrie, on devra préférer celui qui permettra de conserver la plus complète analogie, non-seulement dans la succession des propositions et de leurs énoncés, mais encore dans les démonstrations mêmes de ces propositions. Il est aisé de s'assurer que la disposition la plus favorable à ce développement est à peu près celle qui est adoptée dans les derniers programmes ministériels, et il serait au moins superflu d'exiger d'eux une exactitude parfaite sous ce rapport la question est sans importance.

Il n'en est pas de même des définitions géométriques; leur perfection semble bien autrement importante que celle des détails et de la forme des différentes parties du cours de géométrie. Mais le programme officiel est très-sobre de définitions; à peine en trouve-t-on par-ci par-là une demi-douzaine. Ce n'est pas que le programme ait pensé, on se l'imagine bien, qu'on puisse s'en passer, ni le moins du monde les négliger; mais il a voulu que chaque professeur prît le soin de faire et de choisir ses définitions. Le programme s'est comporté en sage, voilà tout.

CHAPITRE III

Ce que c'est qu'une définition géométrique

On distingue, en logique, deux sortes de définitions : les *définitions de choses* et les *définitions de noms* (1).

Dans une *définition de chose*, on laisse au terme qu'on définit son idée générale ordinaire, et on affirme que dans cette idée sont contenues d'autres idées. Exemple : *l'homme est un animal raisonnable*. Voilà une définition de chose ; car, tout en laissant au mot *homme* son idée générale ordinaire, on affirme que dans cette idée générale est contenue une autre idée, celle *d'un animal raisonnable*. Il peut se faire, bien entendu, que d'autres idées soient encore contenues dans celle d'*homme*.

Une définition de chose n'est pas arbitraire, attendu qu'il ne dépend pas de vous ni de moi que telle ou telle idée soit contenue dans celle qui s'attache ordinairement à telle ou telle expression. Une définition de chose peut être contestée, car ce n'est rien autre qu'une véritable proposition dont l'exactitude peut être évidente comme celle d'un axiome, mais qui peut aussi n'être vraie qu'à la condition d'être démontrée rigoureusement.

Dans une *définition de nom*, on n'a en vue que de faire

(1) Voy. *Pensées de Pascal. — De l'Esprit géométrique.*

savoir que tel terme sera dorénavant le signe de telle idée, qu'on avait jusque-là l'habitude d'exprimer par plusieurs autres termes, ce qui est une économie de mots très-précieuse dans le langage : c'est ainsi qu'on est convenu de désigner, en géométrie, par le mot *polygone*, une figure formée de plusieurs lignes droites qui se coupent deux à deux; par le terme de *parallélogramme*, un polygone de quatre côtés qui sont deux à deux parallèles; par celui de *carré*, un parallélogramme qui a un angle droit compris entre des côtés égaux.

Les définitions de noms sont arbitraires, attendu qu'il est permis de donner à un mot la signification qu'on veut, pourvu qu'on vous en prévienne et qu'on lui conserve cette signification dans le même discours : par conséquent, il n'y a pas lieu de contester à quelqu'un le droit de choisir telle ou telle définition, s'il s'agit d'une définition de nom.

Mais il ne faut pas non plus les confondre avec les *définitions de mots* proprement dites, qu'on trouve dans les dictionnaires et qui ont pour but de faire connaître la signification vulgaire, c'est-à-dire la plus usitée des mots de la langue. Ces définitions de mots ne sont que des explications, dans lesquelles l'auteur n'a d'autre tâche à remplir que d'indiquer l'acception la plus ordinaire avec les différentes acceptions particulières d'un mot, mais non pas les siennes propres.

La distinction qui vient d'être faite de deux sortes de définitions est très-importante; elle est d'ailleurs très-radicale. Une définition de nom n'a jamais pour objet, comme plusieurs paraissent le croire, de ramener une notion quelconque à d'autres plus simples, en la décomposant en quelque sorte dans ses divers éléments; au

contraire, le but unique d'une définition de nom doit être de réunir, sous un seul terme, plusieurs idées distinctes et séparées jusque-là, en vue de les introduire plus commodément dans le discours et de les pouvoir combiner sans peine avec d'autres idées nouvelles. Toute formule d'une définition de nom suppose donc une opération de l'esprit dirigée en sens inverse de celle qui le conduit à une définition de chose.

Dans le premier cas, l'esprit rapproche et groupe des idées à l'aide d'une véritable synthèse, et en fixe le résultat acquis par un mot; c'est la définition de nom. Dans le second cas, il décompose une idée générale en plusieurs autres et se livre à une sorte d'analyse; c'est la définition de chose. Mais il est clair que celui qui se propose de décomposer une idée n'est pas maître d'en faire sortir autre chose que ce qui y est contenu; tandis que celui qui rapproche plusieurs idées, dispose évidemment, jusqu'à un certain point, du choix, de l'arrangement de ces idées et surtout de l'expression qu'il adopte pour formuler le résultat de sa combinaison. Et l'on peut dire, en définitive, que les définitions de nom sont toutes personnelles, arbitraires et incontestables, et qu'il n'en est absolument rien pour les définitions de chose.

Les définitions de la géométrie sont toutes des définitions de nom, telles qu'on vient de les expliquer, c'est-à-dire, grammaticalement parlant, des termes conventionnels par lesquels le géomètre se propose de remplacer, dans le discours, des périphrases plus ou moins longues. Il n'y en a pas une seule qui soit une définition de chose; d'où il résulte cette conséquence que la plus grande latitude doit être accordée au géomètre dans le choix et dans l'usage des définitions.

CHAPITRE IV

Qualités d'une définition géométrique

Bien que les définitions géométriques soient des définitions de noms, elles doivent satisfaire, pour être bonnes et acceptables, à certaines conditions générales qui conviennent à toutes les définitions de noms et qui sont assez évidentes pour que personne ait jamais songé à les contester.

PREMIÈREMENT, il y a dans toutes les langues un certain nombre de mots dont la signification est parfaitement connue, et dont il est permis de se servir comme représentant universellement des idées simples, c'est-à-dire des idées susceptibles d'entrer sans aucune explication préalable dans une combinaison d'idées. C'est un appel au sentiment général de l'évidence.

SECONDEMENT, une définition ne doit renfermer que des termes parfaitement connus ou déjà définis, de telle sorte qu'elle deviendrait une proposition évidente pour l'esprit le moins clairvoyant du monde, si l'on remplaçait tous les termes qu'on y emploie par ce qu'ils signifient, c'est-à dire par leur définition.

TROISIÈMEMENT, il n'est pas permis de changer les définitions consacrées par l'usage, quand on n'y trouve rien à redire et que ce changement n'a d'autre motif que le bon plaisir.

QUATRIÈMEMENT, quand on est obligé de créer une nouvelle définition, il faut faire en sorte que le terme qu'on y applique ait, autant que possible, une signification conforme à l'idée générale que tout le monde en a, c'est-à-dire à son étymologie.

Il est clair que si tout le monde connaissait la signification exacte des mots techniques usités dans une science, toutes les définitions de nom qu'elle contient deviendraient de simples définitions de mots, et, grâce aux dictionnaires, seraient inutiles à rapporter dans les ouvrages. Quant aux définitions de chose, elles seraient à supprimer aussi comme étant de véritables propositions, et le chapitre des définitions ne serait pas long. La nécessité des définitions provient donc uniquement de notre ignorance, et cette nécessité subsistera tant qu'il y aura des hommes à instruire.

Les définitions géométriques doivent aussi posséder deux qualités particulières, qui ne sont pas moins nécessaires que les qualités générales indiquées plus haut, mais qui sont peut-être moins évidentes, et que, pour cette raison, il est utile d'expliquer. Autrefois ces conditions particulières se trouvaient exprimées, dans l'école, par cette formule qu'une définition *doit convenir au défini et rien qu'au défini :* c'est cette formule que nous allons préciser en la développant.

La première qualité particulière et essentielle d'une définition géométrique est que la figure, qui doit être définie, soit une figure *possible*. C'est ainsi qu'il ne serait

pas permis d'appeler *parallélogramme* un polygone de quatre côtés qui sont deux à deux parallèles, s'il n'était d'ailleurs reconnu et démontré qu'une semblable figure est possible. C'est ainsi qu'avant de définir la perpendiculaire, on commencera par démontrer qu'*on peut mener par un point d'une droite une autre droite faisant avec la première deux angles adjacents égaux*. Or, pour démontrer qu'une construction est possible, il suffit d'indiquer un moyen de l'exécuter, quelque soit d'ailleurs ce moyen; par conséquent, il suffit d'imaginer qu'une seconde droite, d'abord couchée sur la première, s'en écarte en tournant autour d'un point commun aux deux droites, et en faisant, d'un côté, un angle qui va en augmentant, de l'autre côté, un angle qui va en diminuant. Si le mouvement de la droite qui tourne se prolonge suffisamment, il arrive que le plus grand des deux angles devient le plus petit et inversement; donc, il y a une position de cette droite pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux, ce qui caractérise précisément la perpendiculaire.

Ce que nous rencontrons ici se présente dans toutes les définitions de la géométrie. Il n'y en a pas une, si simple qu'elle paraisse, qui ne suppose déjà une proposition antérieurement démontrée ou évidente par elle-même. Dans les premières propositions on n'y prend pas garde, soit parce que les premières notions de la géométrie sont familières à tout le monde, soit parce que la possibilité de construire les figures définies est évidente; mais, lorsqu'on a fait quelques pas dans cette étude et surtout lorsqu'on aborde les propriétés des figures dans l'espace, il n'en est plus de même, et il devient indispensable de justifier chaque définition par une proposition

immédiate, si elle ne l'est déjà par quelqu'une des propositions qui précèdent. Ainsi, pour n'en citer qu'un exemple, si l'on définit deux triangles semblables, ceux qui, ayant leurs angles égaux chacun à chacun, ont en outre leurs côtés homologues proportionnels, il est indispensable de démontrer que deux figures pareilles peuvent exister, avant que d'en étudier les propriétés. C'est ce qui résulte de la proposition suivante : *si l'on coupe un triangle quelconque par une droite parallèle à l'un de ses côtés, on forme ainsi un autre triangle qui est semblable au premier*. Toute définition géométrique suppose donc, pour sa justification, une proposition antérieure.

Il faut distinguer soigneusement dans la géométrie ces sortes de propositions FONDAMENTALES, qui n'ont pas précisément le même objet que les autres et qui servent de base aux définitions ; il faut qu'elles soient placées immédiatement avant la définition qui en est la conséquence, ou qu'il soit bien entendu, si on les place après, que c'est par une pure économie de langage. Aussi doit-on blâmer formellement l'usage, très-répandu du reste, de placer toutes les définitions d'un Livre ou d'un Chapitre, au commencement du livre ou du chapitre, et, en quelque sorte, en dehors de toute justification. Ces définitions ainsi posées d'avance, sont pour l'élève autant d'énigmes, et il n'y a rien que l'on puisse invoquer en faveur de cet usage, si ce n'est peut-être quelques considérations typographiques.

La seconde qualité particulière que doit avoir une définition géométrique, c'est que la figure définie soit *unique*, c'est-à-dire que la définition donnée ne puisse pas convenir à plusieurs figures différentes. Mais s'il suffit, pour démontrer qu'une figure définie est possible, d'indiquer un moyen de l'exécuter, quel que soit d'ailleurs ce moyen,

il ne suffit pas, pour démontrer qu'une figure définie est unique, de faire voir que le moyen employé pour exécuter cette figure, n'en donne qu'une effectivement. Il faut, en outre, ou bien démontrer qu'il n'y a pas d'autre moyen à employer pour construire la figure, ou bien prouver que tous les autres, s'il y en a d'autres, reviennent à celui qu'on a employé. Ce n'est qu'à cette condition qu'on aura acquis la certitude que la définition ne peut pas convenir à plusieurs figures différentes, ou, en d'autres termes, que la figure définie est unique. Or, cette condition est évidemment remplie, si l'on parvient à établir, d'une manière indépendante du mode de construction qu'on a employé, qu'il n'y a qu'une seule figure à laquelle puisse s'appliquer la définition.

Ainsi, pour démontrer qu'*on ne peut élever en un point d'une droite qu'une seule perpendiculaire à cette droite,* il ne suffit pas de démontrer que, par le mode même de génération qu'on emploie, il n'y a qu'une position de la droite mobile pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux; il faut abandonner l'idée de mouvement qui a servi à prouver l'existence d'une perpendiculaire, car il ne doit pas en rester de trace dans la démonstration de cette seconde partie de la proposition, et la question doit se poser ainsi : *démontrer que par un point situé sur une droite on ne peut lui élever*, quel que soit le moyen qu'on emploie, *qu'une seule perpendiculaire*. Ou bien, comme la considération du mouvement qui donne la perpendiculaire, dans le cas dont il s'agit, peut donner en même temps toutes les droites qui partent du même point, quelle que soit leur inclinaison, on pourra remarquer que tous les moyens propres à élever une perpendiculaire en un point d'une droite, reviennent au même, par la consi-

dération du mouvement de rotation; et il suffira alors, mais seulement après cette remarque, de dire qu'il n'y a qu'une seule position de la droite en mouvement dans laquelle les deux angles adjacents soient égaux, pour qu'on soit en droit de conclure, que, par un point d'une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite. Mais il est plus facile, à coup sûr, de rendre la démonstration tout à fait indépendante du mouvement qui a servi à établir l'existence de la perpendiculaire.

Ce qui précède se trouve mis en en lumière d'une manière remarquable, à l'occasion d'une proposition bien connue de la GÉOMÉTRIE PLANE. On démontre en effet, dans la théorie des parallèles, que, *par un point situé hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite*, en construisant successivement deux perpendiculaires. Ce moyen de mener une parallèle à une droite, par un point situé hors de la droite, ne peut donner qu'une parallèle passant par ce point; il est aisé de s'en convaincre. Mais il ne s'ensuit pas qu'on ne puisse mener par le même point aucune autre parallèle à la même droite, si l'on vient à adopter une autre procédé pour la construction de cette parallèle. Il reste donc à démontrer, *d'une manière indépendante du mode de construction qu'on a employé*, que, par un point situé hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite. C'est cette seconde partie de la proposition qui constitue le POSTULATUM des programmes officiels.

Il existe, au contraire, une proposition analogue dans la GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE, qu'on peut démontrer sans le secours d'aucun postulatum; cette proposition est ainsi conçue : *par un point donné, on peut mener un plan parallèle à un autre plan, et l'on n'en peut mener qu'un*. Il suffit

de remarquer que par le point donné on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire au plan, et que, par le point donné, on ne peut élever qu'un seul plan perpendiculaire à la droite déjà menée. Comme il a été démontré d'ailleurs, que tout plan, parallèle au plan considéré et passant par le point donné, doit être perpendiculaire à la droite qu'on a menée, il en résulte qu'on peut conclure à l'impossibilité de mener, par le point donné et quel que soit le moyen qu'on emploie, plus d'un plan parallèle au plan considéré.

Dans toutes les branches des mathématiques, la remarque précédente est susceptible d'une application rigoureuse. On rencontre, au début de l'arithmétique, cette proposition : *toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est réduite à sa plus simple expression, c'est-à-dire est irréductible*. Cette proposition est-elle évidente? Elle le serait, si l'on pouvait démontrer auparavant qu'il n'y a qu'un seul moyen de simplifier une fraction, savoir de diviser ses deux termes par un même nombre. Mais, il y a un autre moyen bien connu de simplifier une fraction, et qui consiste à retrancher de chaque terme un nombre convenablement choisi ; par conséquent, il est indispensable de démontrer ici, que toute fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, est irréductible, *quel que soit le moyen qu'on emploie*, c'est-à-dire indépendamment de toute espèce de procédé de simplification. Cela ne fait de doute pour personne.

De même, pour démontrer qu'on peut convertir en décimale une fraction ordinaire, lorsque son dénominateur satisfait à certaines conditions, il suffit de faire voir qu'en appliquant le procédé ordinaire de la division à ses

deux termes, l'opération réussit; mais, si l'on veut prouver qu'une fraction ordinaire irréductible ne peut pas être convertie en décimale, lorsque son dénominateur ne satisfait pas aux mêmes conditions, il ne suffit pas de faire voir qu'en appliquant le procédé ordinaire de la division à ses deux termes, l'opération ne réussit pas. Il faut quelque chose de plus; il faut absolument démontrer de ces deux choses l'une : ou bien que tous les procédés possibles reviennent au procédé ordinaire de la division, ou bien que la chose est impossible, quel que soit le procédé qu'on emploie. C'est cette dernière proposition qui se trouve habituellement établie sous la formule suivante :

Pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre, il faut et il suffit que chacun des facteurs premiers du diviseur se trouve dans le dividende avec un exposant au moins égal à celui qu'il a dans le diviseur.

Les deux qualités particulières qui doivent distinguer toutes les définitions géométriques, et qui sont développées ci-dessus, sont *nécessaires*, c'est-à-dire qu'une définition doit être rejetée, si elle ne remplit pas l'une et l'autre de ces conditions, absolument comme un théorême dont la démonstration n'est pas complète. Il faut ajouter que ces deux qualités particulières sont *suffisantes*, en ce sens qu'une définition qui les possède, si elle satisfait en outre aux conditions générales de toute définition de nom, est nécessairement bonne et acceptable.

On ne comprendrait pas, vu la nature même des définitions mathématiques, qu'on pût exiger, dans leur formation, d'autres conditions que celles qui ont été spécifiées plus haut comme particulières ou comme générales.

Sans doute, on voit bien que les définitions qui possèdent les deux qualités particulières, sans avoir toutes les qualités générales, peuvent être regardées comme rigoureuses, sinon comme parfaites; mais, il est manifeste aussi que la meilleure entre toutes sera évidemment celle qui, avec les deux qualités particulières, possèdera les qualités générales en plus grand nombre et au plus haut degré.

Rien ne serait plus facile même que de faire une classification complète des mauvaises définitions et de formuler, à leur suite, des règles correspondantes qui permissent de les éviter. Mais Condillac l'a dit: « Les règles sont comme les garde-fous qu'on met sur les ponts; ce ne sont pas eux qui font marcher les voyageurs, seulement ils les empêchent de tomber. »

C'est pourquoi nous nous garderons de mettre le lecteur continuellement en présence du tableau des mauvaises définitions; nous l'inviterons, au contraire, le plus souvent possible, à contempler dans son ensemble et dans ses détails l'image des qualités d'une bonne définition. Cette contemplation du vrai sera pour lui agréable en même temps qu'utile; elle lui donnera le moyen, non-seulement de se défendre contre l'erreur, mais encore de la poursuivre et de la vaincre, dans toutes les sciences où la méthode géométrique est applicable.

CHAPITRE V

Double erreur des Géomètres

D'après ce qui est exposé dans le chapitre précédent, on voit comment tombe d'elle-même l'erreur des géomètres qui soutiennent que les définitions n'ont pas besoin d'être démontrées. On lit, en effet, dans un récent traité d'Algèbre : « Il serait absurde de chercher à démontrer les formules (1) et (2); les définitions ne se démontrent pas. »

Une pareille assertion est fausse.

Pour qu'une définition soit bonne et acceptable, il *faut* avoir démontré que cette définition est possible et unique. à moins qu'elle ne le soit évidemment (chap. IV). Une convention géométrique ou algébrique, qui est posée à priori et que rien ne justifie, sauf la fantaisie de son auteur, ne peut avoir aucune valeur logique; elle ne saurait être sérieusement d'aucun usage dans le raisonnement. Au contraire, si une convention est justifiée par ce qui précède ou par ce qui suit, cette convention devient alors une véritable définition géométrique, et c'est cette justification même, médiate ou immédiate, qui en forme la

démonstration. Mais, cette démonstration ne laisse pas que d'être nécessaire, et l'on doit regarder comme une erreur de croire que les définitions ne se démontrent pas. Il n'y a que celles qui sont évidentes par elles-mêmes qui puissent échapper à toute démonstration.

Une erreur semblable, mais dans un sens opposé, a conduit certains géomètres à ne vouloir admettre dans une définition aucune condition superflue. Ces géomètres prétendent appuyer leur opinion sur ce que *toute définition doit convenir au défini et rien qu'au défini*. Partant de là, disent-ils, une définition doit être telle que la figure définie soit complètement déterminée et rien de plus; donc, toutes les conditions qui ne sont pas essentielles à sa complète détermination sont superflues et doivent être bannies de la définition. Cette prétention exagérée est une erreur, qui a sa source dans une mauvaise interprétation du principe que la définition doit convenir au défini et rien qu'au défini. Nous avons examiné plus haut (chap. IV) ce qu'on doit entendre par ce principe de logique, et nous avons reconnu que les seules qualités particulières que doit posséder une bonne définition géométrique, sont : 1° que la figure définie soit possible; 2° que cette figure soit unique. Le nombre des conditions qu'il est permis de faire entrer dans la définition d'une figure demeure donc absolument arbitraire; rien ne s'oppose à ce que le nombre de ces conditions soit très-grand, et même aussi grand qu'on voudra. Citons un exemple, pour éviter de rester dans le vague des généralités.

Beaucoup d'auteurs définissent les *triangles semblables*, en disant que ce sont ceux qui ont *les angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels*. Quel-

ques-uns faisant remarquer que, si deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont nécessairement proportionnels, ont crû bien faire que de définir les triangles semblables ceux qui ont *leurs angles égaux chacun à chacun*. D'autres, se fondant sur la remarque inverse et écartant la considération des angles, définissent deux triangles semblables à ceux qui ont *les trois côtés proportionnels*. Les uns font ainsi entrer *trois* conditions dans la définition des triangles semblables, les autres *deux* seulement; et il y a ainsi, dans la première définition que nous avons citée, *deux* ou *trois* conditions superflues (1).

Mais, au point de vue de la rigueur, il suffit qu'un auteur justifie sa définition par une proposition fondamentale immédiate, si elle ne l'est déjà par une proposition antérieure, démontrée ou évidente, pour qu'il soit en droit de la choisir comme il lui plaît. On peut donc adopter, en toute rigueur, l'une ou l'autre de ces trois définitions : seulement, la première et la dernière exigeront pour leur justification un théorème spécial; quant à la deuxième, elle n'en exigera pas, parce qu'on a déjà eu l'occasion de rencontrer des triangles ayant leurs angles égaux chacun à chacun; mais, dans la théorie des triangles semblables qui découlera de cette définition, il n'y aura pas pour cela une proposition de moins à démontrer; le nombre des propositions reste le même, quelle que soit la définition qu'on adopte; l'énoncé et l'ordre des propositions seuls sont changés.

(1) Une *condition* se traduit ordinairement en géométrie par une *égalité*, et on estime le nombre des conditions, dans un énoncé, par celui des égalités qui y sont exprimées.

Il faut remarquer toutefois que, si l'on est en droit de choisir celle qu'on veut de ces trois définitions, puisque toutes les trois possèdent les qualités particulières essentielles d'une bonne définition géométrique, il y a lieu de préférer la première aux deux autres, comme remplissant mieux les conditions générales auxquelles doivent satisfaire toutes les définitions de noms. L'idée de *similitude*, quand il s'agit de deux objets quelconques, ne porte pas plutôt sur les angles que sur les côtés de ces objets, mais bien sur l'ensemble de toutes les parties qui les composent : c'est ainsi qu'il est naturel, dans la définition géométrique de deux triangles semblables, d'envisager à la fois les angles et les côtés, sans écarter la considération des uns ni celle des autres. La première des trois définitions citées plus haut, précisément parce qu'elle comporte un plus grand nombre de conditions géométriques, est donc préférable à toute autre, en ce sens que la signification qu'elle attache au mot *semblable* est plus conforme à l'idée générale que tout le monde possède de la similitude, c'est-à-dire à son étymologie.

Le choix de cette définition entraîne forcément une grande analogie entre la théorie de l'égalité géométrique des triangles et celle de leur similitude : or, cette analogie doit être maintenue; car elle est naturelle, et les trois cas de similitude doivent correspondre exactement aux trois cas d'égalité. Il est presque inutile d'ailleurs de faire observer que la propriété des triangles, à côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, n'est qu'un simple corollaire d'un des trois cas de similitude.

Enfin, si l'on était obligé de n'introduire dans la définition d'une figure aucune autre condition que celles qui

suffisent à la compléte détermination de cette figure, on serait souvent conduit à des conséquences singulières. Il faudrait modifier la définition d'un polygone régulier, celles du prisme, du parallélipipède, etc., car chacune de ces définitions contient beaucoup de conditions superflues; il faudrait abandonner la définition ordinaire de l'égalité de deux triangles, car il suffit que deux triangles aient un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, pour qu'ils soient superposables. Il en serait de même de l'égalité de deux figures quelconques, et enfin d'un très-grand nombre de définitions de la géométrie plane ou dans l'espace, que jamais personne n'a songé à critiquer, parce qu'elles sont, au point de vue de la logique, complétement satisfaisantes; il suffit, en effet, qu'une définition géométrique possède les deux qualités essentielles que nous avons fait connaître, si elle satisfait d'ailleurs aux conditions générales de toutes les définitions de noms, pour qu'elle soit bonne et acceptable.

CHAPITRE VI

Définitions artificielles

Il y a tout une classe de définitions qui sont nées de l'erreur signalée dans le chapitre précédent, et que l'on peut, à justre titre, qualifier de *définitions artificielles*. Elles se distinguent toujours par l'absence de quelque condition naturelle, et par conséquent essentielle, ou par la présence de quelque condition qui n'est point du tout naturelle, et qui, par suite, doit être rejetée.

Les définitions artificielles ne peuvent engendrer que des simplifications apparentes et sont très-difficiles à loger au fond de l'intelligence des élèves ; au contraire, une définition bien faite, outre qu'elle se retient et se retrouve aisément, conduit toujours l'esprit qui raisonne, par les voies les plus simples, à la découverte de la vérité ; car, ce n'est qu'en ayant sans cesse devant les yeux l'ordre logique des idées qu'on parvient à formuler une définition vraiment naturelle.

Qui n'a pas eu entre les mains ce manuel du baccalauréat dont l'auteur, désireux d'abréger la théorie des parallèles, définit deux droites parallèles *celles qui en ren-*

contrent une troisième en faisant avec elle des angles correspondants égaux? Sans doute, il lui est aisé de tirer comme conséquence de sa définition l'égalité des angles alternes internes, alternes externes, etc. Mais, il oublie qu'il est tenu par la logique de justifier sa définition, et cette justification exige la démonstration préalable d'un théorème équivalent à celui qu'il veut éviter, savoir : *si deux droites font avec une troisième des angles correspondants égaux, les angles correspondants qu'elles forment avec toute autre droite sont aussi égaux*. La difficulté, que l'auteur du manuel a voulu tourner, reste donc entière; elle est seulement cachée aux yeux du lecteur inattentif ou trop peu clairvoyant, et la simplification qui en résulte n'est qu'apparente.

On ne saurait trop tenir son esprit en garde contre le désir de pareilles simplifications, qui ne sont qu'illusoires; ce sont de véritables erreurs, dont il est plus difficile de se garantir qu'on se l'imagine. Les programmes officiels ont introduit dans l'enseignement, il y a 15 ou 16 ans, un nouvel énoncé du théorème des parallèles rencontrées par une sécante; cet énoncé a été presque universellement adopté parce qu'il semblait plus simple que l'énoncé classique de Legendre, composé de cinq parties. Le voici tel qu'il figure encore dans les programmes d'admission à l'école Polytechnique : *lorsque deux droites parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus qui en résultent sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus* (1). Ce théorème est vrai; mais la réciproque en est fausse, à moins qu'on ne dissèque cette réciproque en cinq morceaux. Cependant, on trouve dans un

(1) Voy. *Plan d'études des Lycées*. Classe de mathém. spéciales.

traité récent et très à la mode, l'énoncé textuel de cette réciproque avec une démonstration au bout; l'auteur du changement d'énoncé n'avait certes pas l'intention d'imposer une erreur aux adeptes des programmes officiels.

Un exemple très-remarquable de définition artificielle, c'est la définition des polyèdres semblables donnée par Legendre dans sa XV[e] édition. Legendre définit d'abord les tétraèdres semblables *ceux qui ont deux faces semblables chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées entre elles;* il dit ensuite, comme définition, que deux polyèdres sont semblables, *lorsqu'ayant des bases semblables, les sommets des angles solides hors de ces bases sont déterminés par des tétraèdres semblables chacun à chacun* (1).

De cette double définition, il tire relativement aux polyèdres les deux théorèmes suivants :

1° *Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables et les angles solides homologues égaux* ;

2° *Deux polyèdres semblables peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune et semblablement placées.*

On ne peut rien objecter à cette théorie sous le rapport de la rigueur. La définition des tétraèdes semblables n'a pas besoin de justification nouvelle; puisqu'on a appris, dans la géométrie plane, à construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné, on pourra évidemment en construire deux dans des plans différents et ayant entre eux une inclinaison donnée. Celle des polyèdres semblables n'en a pas besoin non plus, car on peut toujours sur un triangle semblable à un triangle

(1) Voy. Legendre, *Eléments de Géométrie*, liv. VI, définit. et suiv..

donné construire un, deux, trois tétraèdres respectivement semblables à des tétraèdes donnés.

Mais, au point de vue de la logique, on ne saurait approuver ni l'une ni l'autre de ces définitions : premièrement, l'idée générale que tout le monde se fait de la similitude de deux tétraèdres n'est point celle qui est réveillée dans l'esprit par la définition précédente, et l'on ne saurait regarder comme naturel de faire entrer, dans la définition de deux solides semblables, des conditions portant exclusivement sur un angle et deux de leurs faces, plutôt que sur les autres angles et les autres faces. Quant à la définition des polyèdres semblables, elle est entachée du même défaut et au même degré. Ces deux définitions sont donc purement artificielles, et doivent être remplacées par celles qu'on trouve dans les programmes officiels, et qui ne sont que l'extension des définitions analogues données dans la théorie des triangles et polygones semblables (1).

D'ailleurs, ces définitions choisies par Legendre, et auxquelles quelques personnes tiennent beaucoup, ne simplifient rien. L'auteur est obligé de démontrer, sous forme de proposition, que deux polyèdres semblables ont leurs faces semblables chacune à chacune et leurs angles solides homologues égaux ; et la démonstration de cette proposition, dans la théorie de Legendre, n'est ni plus courte, ni plus élégante que celle des propositions qui résultent de la définition des programmes : l'ordre seul des théorèmes est interverti.

Mais, l'inconvénient principal qui s'attache au choix de

(1) Voy. *Plan d'Etudes des Lycées.* — Classe de mathématiques spéciales. — *Passim.*

ces définitions, c'est qu'il détruit absolument l'analogie qui doit exister entre la théorie de la similitude des figures planes et celle des figures solides; or, cette analogie doit être complète, non-seulement dans les définitions et dans l'ordre des propositions, mais encore dans les démonstrations mêmes des théorèmes.

« La conservation de l'analogie entre les parties d'un même traité, dit S.-F. Lacroix, est de la plus haute importance, puisqu'en même temps qu'elle aide la mémoire du lecteur, elle l'accoutume à généraliser ses idées. En effet, depuis qu'on a cultivé la stéréotomie, on a remarqué que la plupart des propriétés des lignes et des figures, tracées sur un même plan, n'étaient que des cas particuliers de celles des lignes, des plans et des corps, considérés dans l'espace ; et il devenu indispensable de traiter, autant qu'il est possible, dans le même ordre et par des moyens semblables, la partie de la géométrie où l'on n'a égard qu'à deux des dimensions de l'espace et celle où l'on embrasse les trois à la fois (1). »

Cette observation de Lacroix est encore plus importante aujourd'hui qu'il y a soixante ans, la géométrie analytique à trois dimensions étant entrée depuis cette époque dans l'enseignement classique.

Il est vrai que la définition des programmes officiels renferme, en grand nombre, des conditions que nous avons nommées superflues (chap. V), et qu'on pourrait se contenter de faire entrer, dans la définition des polyèdres semblables, l'idée de *faces semblables* et celle de *dièdres égaux* chacun à chacun, à la place de celle d'*angles so-*

(1) Voy. S.-F. Lacroix. — *Discours lu à la Société Philomatique*, an VI.

lides égaux; mais, encore une fois, il n'y aurait aucun avantage à adopter même cette minime restriction : nous avons reconnu que l'introduction des conditions superflues, dans une définition, est permise, et qu'elle devient une obligation, s'il s'agit de rendre une définition naturelle ; et l'on ne saurait nier que la définition des polyèdres semblables, qu'on trouve dans les programmes officiels, ne satisfasse complètement à toutes les conditions d'une bonne définition.

Une remarque analogue à celle qui précède, peut trouver sa place dans la théorie des grandeurs proportionnelles, telle qu'elle est proposée par quelques auteurs modernes.

Le point essentiel de cette théorie est de présenter à l'élève la question sous une forme rigoureuse, et assez simple pour qu'il puisse aisément en retrouver la trace et le développement, dans toutes les circonstances semblables. Sous ce rapport, il est regrettable que quelques auteurs, s'écartant de l'idée naturelle des grandeurs proportionnelles, aient cherché à adopter et à préconiser une définition toute de fantaisie, dont la seule qualité consiste à changer l'espèce et le nombre des conditions qui se rattachent ordinairement au mot *proportionnel.*

L'idée générale que tout le monde possède des grandeurs proportionnelles, est exprimée par la définition suivante, qui se trouve dans presque tous les traités d'arithmétique :

« On dit que *deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre*, lorsque deux valeurs quelconques de la première ont le même rapport que les valeurs correspondantes de la seconde. La géométrie, la mécanique, la physique, font connaître des grandeurs proportionnelles

les unes aux autres. En arithmétique, on n'a, dans aucun cas, pour objet de démontrer cette proportionnalité : on l'admet comme un fait qui sert à la solution des questions relatives à ces grandeurs (1). »

Le mot *simultané*, que quelques auteurs se plaisent à introduire dans cette définition, doit en être exclu; car, si ce mot fait image dans la définition, il n'y ajoute rien, et il peut donner à croire que la condition de simultanéité dans les valeurs correspondantes est essentielle, pour que les deux grandeurs dont il s'agit soient proportionnelles, tandis que cela n'est pas : le *temps* n'entre pour rien dans la proportionnalité de deux grandeurs. En vérité, il n'existe pas un seul exemple en géométrie, ni en mécanique, ni en physique, de deux grandeurs proportionnelles qui le soient simultanément; cette condition de simultanéité doit donc être supprimée de la définition, non-seulement comme superflue, mais encore comme contraire à la nature des choses, c'est-à-dire comme étant purement artificielle.

La définition de deux grandeurs proportionnelles, telle qu'elle a été donnée plus haut, ne laisse rien à désirer, car elle comprend toutes les conditions naturelles auxquelles doivent satisfaire deux grandeurs pour être proportionnelles; elle suppose d'ailleurs connue la signification du mot *rapport*, quelle que soit la signification qu'on attache à ce mot. Mais, pour faciliter les applications numériques qu'on peut faire des propriétés de deux grandeurs proportionnelles, on démontre, en arithmétique, le principe ou théorème suivant :

(1) Voy. J. Bertrand, *Traité d'Arithmétique*, chap. XII.

Lorsque deux grandeurs sont telles que, si l'une devient deux, trois, quatre fois plus grande ou plus petite, l'autre devient aussi deux, trois, quatre fois plus grande ou plus petite, ces deux grandeurs sont proportionnelles.

On en conclut qu'il suffit de reconnaître que deux grandeurs satisfont à la condition exprimée par ce théorème, pour être en droit d'affirmer qu'elles sont proportionnelles. Cependant, quelques auteurs ont proposé récemment de remplacer ce théorème par celui-ci, qui présente à un haut degré le caractère des définitions artificielles :

Deux grandeurs (de nature différente), *sont proportionnelles l'une à l'autre, si à deux valeurs* (quelconques, mais) *égales* (entre elles) *de la première, répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première, répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

Avec un peu d'attention, on reconnaît sans peine que l'énoncé de ce nouveau principe, même débarrassé des termes inutiles qui l'encombrent, n'est pas plus simple que le précédent ; que la rigueur ne gagne absolument rien à ce que *la somme* de deux valeurs quelconques remplace *un multiple* d'une valeur quelconque, attendu que la multiplication est un cas particulier de l'addition ; que l'idée de somme ne s'associe pas aussi naturellement que celle de multiple, à l'idée générale de rapport ou de grandeurs proportionnelles ; enfin, que la démonstration du principe ainsi énoncé, si elle est complète, n'est pas plus facile ni plus courte que la démonstration vulgaire. Il est donc difficile de s'expliquer logiquement, que ce

second principe soit préféré au premier, pour un autre motif que le bon plaisir de son auteur.

Quant à l'usage que l'on peut faire, soit de l'un, soit de l'autre, dans les Éléments de géométrie, en vue d'abréger les raisonnements propres à chaque question relative aux grandeurs proportionnelles, il est à souhaiter que cet usage puisse se répandre et s'implanter dans l'enseignement élémentaire; car, ce qu'il y a de général, dans les démonstrations relatives aux grandeurs proportionnelles, étant mis à part, il est certain qu'on distingue mieux ensuite ce qui est particulier à chacune d'elles. Cependant, on ne saurait méconnaître que l'esprit d'analogie manque à la jeunesse, même la plus studieuse, et que l'application d'un principe général est une chose toujours difficile pour un élève : cette difficulté augmente encore, si le principe général, qu'il lui faut appliquer et qui est, en définitive, la partie abstraite de la démonstration, n'a pas une forme simple, naturelle et brève, qui se prête aisément aux transformations. A ce point de vue, essentiellement pratique, on ne voit pas non plus quel avantage on peut retirer, même avec la meilleure volonté du monde, de l'introduction de ce nouveau principe dans l'enseignement de la théorie des grandeurs proportionnelles.

CHAPITRE VII

Premières définitions de la Géométrie

On pense assez généralement que les mots *volume*, *ligne* et *point*, expriment des idées dont la simplicité va en croissant par degrés, dans l'ordre où ils sont écrits. Ainsi, il semble à beaucoup d'esprits que l'idée de surface est plus simple que celle de volume, l'idée de ligne plus simple que celle de surface, et l'idée de point plus simple que celle de ligne. C'est pourquoi certains auteurs, peu soucieux du fond des choses, dont l'esprit est rempli outre mesure des idées d'application pratique, ont cru bien faire que de donner la définition du *point* en premier lieu, comme étant ce qu'il y a de plus facile à comprendre, et de définir ensuite la *ligne* au moyen du point, la *surface* au moyen de la ligne et le *volume* au moyen de la surface ; d'autres, ayant quelques scrupules, l'ont fait en partie seulement, peut-être avec le regret de ne pouvoir aller plus loin. Cette manière de voir est une erreur, et c'est précisément le contraire qui est vrai : il suffit, pour s'en convaincre, d'analyser comment l'esprit acquiert successivement les idées de volume, surface, ligne et point.

L'esprit conçoit d'abord, en partant de l'existence des corps et sans aucune abstraction nécessaire, ce que c'est que le *volume d'un corps*, en tant que c'est l'ensemble des parties de l'espace que ce corps occupe; puis, faisant abstraction de tout ce qui est intérieur au corps et le considérant seulement dans les parties qui sont en contact avec l'extérieur, il donne le nom de *surface géométrique* à l'ensemble de ces parties qui sont communes au corps et à l'espace environnant. L'esprit n'arrive ainsi à l'idée de surface géométrique qu'après avoir fait une première abstraction se rapportant à toutes les parties intérieures du volume.

L'idée de surface conduit de même l'esprit, au moyen d'une seconde abstraction, à celle de ligne; une *ligne géométrique* n'étant autre chose que l'ensemble des parties communes à deux surfaces qui se rencontrent.

Pareillement, si l'on considère deux lignes qui se coupent, uniquement dans la partie qui est à la fois sur l'une et sur l'autre, et si l'on fait abstraction des autres parties, on arrive à l'idée du *point géométrique*. C'est donc par le moyen de trois abstractions successives que l'esprit parvient à concevoir et à définir le point mathématique.

En résumé, les idées de *volume*, *surface*, *ligne* et *point*, sous le rapport géométrique, naissent dans l'ordre où ces mots sont écrits; les définitions qui en découlent doivent donc se succéder dans cet ordre, et non pas dans l'ordre inverse.

Il y a, il est vrai, une autre manière d'exprimer le même résultat, c'est de dire qu'une surface est la limite du volume d'un corps, une ligne la limite d'une surface, un point la limite d'une ligne (1). Donner ces définitions,

(1) Voy. S.-F. Lacroix, *Eléments de Géométrie*, 3e édit. 1803.

c'est procéder rationnellement par une série d'abstractions, mais sans indiquer la nature de ces abstractions. Ces définitions sont donc exactes au fond, mais plus difficiles à comprendre que les premières.

On retrouve la même qualité avec le même défaut, mais à un plus haut degré, dans les définitions suivantes, qui sont cependant très-vulgaires : un volume est ce qui a trois dimensions, longueur, largeur et épaisseur (1) : une surface est ce qui a deux dimensions, longueur et largeur, sans épaisseur ; une ligne est ce qui n'a qu'une dimension, longueur, sans largeur ni épaisseur. Il faut donc enlever à un volume, par la pensée, ses trois dimensions pour obtenir le point mathématique. Ces définitions expriment d'une manière exacte, mais trop concise, ce que nous avons précisé un peu auparavant ; elles ne spécifient rien d'ailleurs sur la nature des abstractions que l'esprit doit faire pour arriver au résultat. Or, on ne doit pas perdre de vue qu'un corps cesse d'exister réellement, si l'une de ses dimensions vient à disparaître : qu'il n'y a point effectivement de longueur sans largeur, ni épaisseur, et encore moins quelque chose qui n'ait aucune dimension. Le point, la ligne et la surface géométriques ne sont que de pures abstractions de l'esprit ; le volume géométrique d'un corps peut se concevoir lui-même, indépendamment du corps dont il tient la place ; c'est donc aussi, au point de vue mathématique, une pure abstraction. Qu'est-ce donc alors que ce qui a longueur et largeur, et point d'épaisseur? qu'est-ce qu'une figure qui n'a aucune dimension? C'est ce qu'il est très-difficile de comprendre, si l'on ne s'est pas

(1) Voy. Legendre. *Eléments de Géométrie.* 15e édit.

expliqué auparavant comment une pareille figure est possible, si l'esprit n'a pas été amené par degrés à faire une série d'abstractions déterminées et analogues à celles qui ont été indiquées plus haut. Dans le cas actuel, chacune de ces abstractions n'est autre chose que l'opération dont il a été question dans le développement des qualités particulières que doit posséder une bonne définition géométrique (chap. IV); chacune d'elles est une démonstration servant à établir que la figure définie est *possible*.

Pour démontrer qu'une figure géométrique est possible, il suffit, comme on l'a vu, de donner un moyen de construire cette figure; ce moyen peut être très-mauvais, si l'on essaie de le mettre en pratique, il peut être une simple opération de l'esprit, comme dans ces premières définitions de la géométrie; mais il faut que ce moyen soit donné pour que la définition se trouve justifiée. C'est donc par un pur oubli de l'une des qualités essentielles que doivent posséder toutes les définitions géométriques, que certains auteurs, bien intentionnés d'ailleurs, ont cru pouvoir écourter ainsi les premières définitions de la géométrie.

Rien n'empêche, d'ailleurs, de retourner après coup la série des idées qui ont conduit l'esprit à la découverte du point mathématique, et d'imaginer qu'un point se déplace dans l'espace. Ce point, dans son mouvement, produira une ligne; la ligne en mouvement décrira une surface, et la surface un volume.

Il est à noter qu'en général l'opération, qu'on indique pour démontrer qu'une figure géométrique est possible, n'est pas toujours la plus simple manière de construire cette figure. S'il arrive que la meilleure solution

logique soit aussi la meilleure solution pratique, tant mieux! mais, à coup sûr, ce ne sera pas toujours ainsi, et souvent même le contraire se produira.

Cela tient à ce que, dans la bonne pratique des choses, on doit mettre en jeu tous les résultats obtenus, toutes les connaissances acquises sur le sujet en question, sans s'inquiéter de l'ordre logique des idées; quelquefois même, la meilleure application pratique exigera le renversement complet de l'ordre logique des idées qui ont conduit à faire cette application. Dès qu'il s'agit d'atteindre un but pratique, le procédé le plus court est évidemment le meilleur; mais, pour justifier une définition placée au début d'une théorie, il y aura toujours péril, au point de vue de la logique, à renvoyer le lecteur, comme l'ont fait plusieurs auteurs et notamment Clairant, à la solution d'un problème qui n'est donnée qu'à la fin de cette théorie.

C'est sans doute en l'entendant de cette façon, mais en se trompant de mot, que des esprits sérieux ont osé dire tout haut et écrire tout au long qu'il y a deux espèces de logique, la logique *théorique* et la logique *pratique,* et que, dans l'enseignement classique, on doit tenir compte de la seconde comme de la première. En réalité, il n'y a pas deux sortes de logique : tout ce qui n'est pas logique est illogique, et la meilleure manière d'arriver à une bonne pratique des choses, c'est d'apprendre parfaitement la théorie logique des idées. La distinction qui précède de la logique en deux espèces ne saurait donc aboutir, au point de vue de l'enseignement classique, qu'à un barbarisme prétentieux et vide de sens.

CHAPITRE VIII

Définition des lignes et surfaces courbes

Les anciens géomètres avaient imaginé, pour résoudre les questions relatives aux lignes et surfaces courbes, de substituer à ces figures d'autres figures qu'ils savaient déjà comparer entre elles et qui pouvaient différer des premières d'aussi peu qu'on voulait. Ils cherchaient ensuite la relation entre ces nouvelles figures, qu'ils choisissaient de la manière la plus commode, et, cette relation une fois trouvée, ils en déduisaient par analogie, induction ou intuition, celle qui devait exister entre les figures considérées. Ce procédé naturel n'est autre chose, à proprement parler, que la *méthode des limites*.

Pour compléter la question, pour en mettre la solution en quelque sorte à l'abri de toute attaque, ils démontraient en outre que cette solution ne pouvait pas ne pas être la vraie : cette dernière partie de la démonstration se faisait par la méthode connue sous le nom de *réduction à l'absurde*.

C'est ainsi qu'Euclide a prouvé que *deux cercles quelconques sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Les géomètres modernes ont perfectionné ce genre de démonstration, en appuyant le raisonnement sur un petit nombre de principes généraux, dont l'ensemble forme la *théorie des limites*. Ils l'ont aussi simplifié, en le débarrassant de cet appendice du raisonnement, où l'on réduit à l'absurde toute hypothèse contraire, ce qui est bon pour convaincre l'esprit, mais très-peu propre à l'éclairer, surtout si la proposition dont il s'agit est compliquée.

Cependant quelques esprits se sont fortement préoccupés, dans ces dernières années, du désir de simplifier encore davantage les démonstrations propres à la mesure des lignes et surfaces courbes et d'augmenter encore, si cela est possible, la rigueur de ces démonstrations, ce qui constituerait un double et véritable progrès.

La simplification s'est présentée d'elle même, en ce sens que la théorie des limites est entrée aujourd'hui dans l'enseignement classique de l'algèbre, et qu'on peut se dispenser d'en développer les principes dans les traités de géométrie.

Quant à l'augmentation de rigueur, elle porte uniquement sur cette considération que la longueur d'un arc de cercle ou d'une circonférence, l'aire d'un cercle, d'un cylindre, etc. ne sont pas des grandeurs que l'on puisse, à priori, introduire dans une démonstration, c'est-à-dire dans une comparaison avec des lignes ou des surfaces brisées, comme le firent Archimède et Euclide, comme l'ont fait Legendre et Lacroix, comme le conseillent encore les derniers programmes officiels.

Tout le monde s'accorde, il est vrai, à reconnaître que la longueur d'une ligne droite n'est pas susceptible de définition, c'est-à-dire que l'idée de longueur, quand il

s'agit d'une ligne droite, est une idée simple, qu'on doit introduire directement dans les considérations géométriques. Mais, d'après quelques géomètres, il n'en est pas de même de la longueur d'une ligne courbe ; et il est nécessaire de ramener la notion générale de longueur à celle de la ligne droite, ainsi que la notion générale des aires à celle d'une aire polygonale, plane ou brisée, au moyen de nouvelles définitions dûment justifiées. C'est ainsi que l'on a été conduit à formuler, dans les Eléments de géométrie, des définitions telles que celles-ci :

« *La longueur d'un arc de cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés.* »

Et en particulier :

« *La longueur d'une circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.* »

Et de même :

« L'aire latérale du prisme inscrit (à un cylindre) tend vers une limite fixe, indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de sa base tendent vers zéro; c'est *cette limite que l'on appelle l'aire latérale du cylindre.* »

Cet énoncé est donné comme une définition.

Et encore :

« On appelle *aire latérale* d'un cône la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite, dont le nombre des faces croît indéfiniment. » On légitime cette *définition* en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. »

Et enfin :

« Considérons un arc de cercle et une ligne brisée régulière inscrite ; tandis que l'arc tourne autour d'un diamètre, la ligne brisée régulière engendre une aire, qui tend vers une limite indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro..... C'est cette limite de l'aire engendrée par la ligne brisée régulière inscrite qu'on appelle *aire de la zone* décrite par l'arc. »

Ce procédé d'ailleurs n'est pas nouveau.

Dans un traité d'analyse, qui passe avec quelque raison pour le plus rigoureux et le plus exact des traités de mathématiques, le procédé a déjà été mis en lumière, il y a une douzaine d'années, et d'une manière très-remarquable.

L'auteur commence le chapitre relatif à la mesure des lignes et surfaces courbes par ces mots : « La notion de longueur est une de celles qui ne sont pas susceptibles de définition. » Ces mots se rapportent à la longueur d'une ligne droite; mais, quand il s'agit de la longueur d'une ligne courbe, il continue ainsi :

La définition générale, au moyen de laquelle la notion de longueur est ramenée au cas de ligne droite, est la suivante :

« *La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.* »

L'auteur démontre que cette limite existe et est unique, à l'aide de la notion de tangente à un arc de courbe.

Une définition analogue se rencontre pour l'aire des surfaces courbes.

« Nous appellerons *aire d'une portion de surface la*

limite vers laquelle tend celle d'une polyèdre inscrit dont les faces sont infiniment petites dans tous les sens. »

Il est encore nécessaire de démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la figure des faces du polyèdre et la loi de leur décroissement.

L'auteur le démontre à l'aide de la notion du plan tangent à une surface.

Examinons si le choix de ces nouvelles définitions est conforme à toutes les règles, générales et particulières, qui ont été établies pour formuler une bonne définition géométrique.

CHAPITRE IX

Règles générales de la définition des lignes et surfaces courbes.

Sans doute, il ne faut pas oublier que les définitions de la géométrie sont absolument personnelles, arbitraires et incontestables (chap. III): cependant, sous le rapport des règles générales, on peut se demander si l'on ne cherche pas ici à définir des termes qui expriment des notions assez simples pour entrer, sans aucune explication préalable, dans une combinaison d'idées (chap. IV).

La longueur d'une ligne est une qualité particulière de cette ligne, qui est tout à fait distincte de la ligne elle-même, mais qui en est pourtant inséparable, de même que la surface d'un cercle est inséparable du cercle et le volume d'un cylindre inséparable du cylindre. On ne saurait concevoir, un effet, qu'une ligne puisse exister sans longueur, pas plus qu'une surface sans longueur ni largeur, pas plus qu'un volume sans ses trois dimensions (chap. VII.)

Il est vrai que la longueur d'une ligne, la surface d'un cercle et le volume d'un cylindre, existent ainsi à l'état

idéal ou théorique, et que cette idée ne prend une forme matérielle ou sensible que si l'on procède à la mesure de la ligne, de la surface ou du volume. Cette mesure se traduit alors nécessairement par une série d'opérations graphiques ou arithmétiques, qui peuvent aboutir, même dans le cas de la ligne droite, à un résulat non susceptible de s'exprimer par des nombres; cela arrive toutes les fois que l'infini se rencontre sous une forme quelconque dans la série des opérations. Mais, si l'exactitude des opérations graphiques trouve des bornes dans l'inévitable imperfection des instruments, si, par le calcul, nous approchons indéfiniment de la longueur d'une courbe, sans jamais pouvoir l'exprimer exactement, il n'en demeure pas moins vrai que nous atteignons, par la pensée, sans peine et d'un seul coup, cette limite qui n'est autre chose que la longueur de la ligne.

Il est donc permis d'affirmer raisonnablement que la longueur d'une ligne courbe définie existe, même pour celui qui ne peut pas ou ne sait pas la mesurer. Il est permis de tenir pour certaine cette vérité, par exemple, que la longueur d'une ligne courbe est moindre que celle de telle ou telle autre, si cette vérité résulte de la double définition de la ligne droite et de la ligne courbe, et de quelque autre vérité déjà reconnue, sans qu'il soit nécessaire de trouver le nombre qui exprime la mesure ni de l'une ni de l'autre. Et l'on ne saurait établir de différence, sous ce rapport, entre la surface d'un rectangle. défini par sa base et sa hauteur, et l'aire d'un cercle défini par son rayon : il y a tel rectangle dont la surface est évidemment plus grande ou plus petite que celle d'un cercle, ce qui implique forcément cette idée que, si l'on mesurait la surface du rectangle et celle du cercle, le

résultat trouvé pour la première surpasserait le résultat trouvé pour la seconde. Renverser les termes de cette affirmation est évidemment un contre-sens, au point de vue théorique de la définition.

D'où l'on peut conclure que, si une ligne est définie convenablement, la longueur de cette ligne *existe*, par cela même que la ligne a été définie, et cette longueur est évidemment *unique;* en d'autres termes, la longueur de la ligne se trouve elle-même définie, sans qu'il soit besoin de *ramener la notion de sa longueur à une autre plus simple* (1).

Secondement, si l'on est obligé de choisir une définition, il faut faire en sorte que le mot qu'on emploie ait, autant que possible, une signification conforme à l'idée générale que tout le monde en a, c'est-à-dire à son étymologie (chap. IV). Or, l'idée que tout le monde se fait de la longueur d'un arc de cercle, n'est certes pas celle de *la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés.* C'est une manière de voir, qui est exacte sans doute, mais qui est trop peu naturelle pour être prise comme définition.

Lorsqu'il s'agit de l'enseignement élémentaire surtout, cela a de l'importance; car, comme on l'a vu dans le chapitre II, en suivant l'ordre logique des idées, on a déjà plusieurs fois considéré la longueur d'un arc de cercle, avant d'aborder la question de sa mesure. S'il

(1) Quelques classiques modernes ont écrit ou reproduit de confiance, sur ce sujet, des paragraphes entiers, qui sont remplis de contradictions dans les termes et dans les idées, et que nous recommandons aux élèves de lire avec attention.

y a nécessité d'envisager cette figure sous un point de vue nouveau, il faudra le faire, cela va sans dire ; mais que cette considération serve de texte à un théorème nouveau, comme le recommande toute l'économie des programmes officiels (1), et ne soit pas l'objet d'une nouvelle définition. Autrement, vous courez le risque, presque certain, de jeter la confusion dans une série d'idées très-claires d'aileurs, et vous perdez en netteté ce que vous espériez gagner en rigueur.

Si encore il résultait de cette manière de faire, un avantage notable pour la brièveté de la démonstration ! Mais il n'en est rien : la longueur du raisonnement, nécessaire à la complète justification de cette nouvelle sorte de définition, égale tout au moins l'étendue des démonstrations ordinaires de la géométrie. Il est aisé de s'en assurer, en examinant de plus près cette justification.

Des professeurs très-distingués nous ont avoué qu'ils avaient de bonne foi cherché à adopter, dans leur enseignement, cette manière de procéder ; ils se donnaient beaucoup de peine, se heurtaient à des difficultés continuelles, et ont fini par reconnaître que l'introduction brusque de cette définition dans les éléments, n'était qu'un rouage de plus à faire mouvoir, c'est-à-dire une complication ; or, ce qu'il faut à l'enseignement, c'est la simplicité.

(1) Voy. *Plan d'Etudes des Lycées*, prog. 5, la note.

CHAPITRE X

Règles particulières de la définition des lignes et surfaces courbes

La justification d'une définition a pour but de faire voir que cette définition satisfait aux deux conditions particulières d'une bonne définition géométrique (chap. IV). Dans le cas actuel, cette justification comprend deux parties : 1° une partie, où l'on démontre qu'*il existe une limite* vers laquelle tend la longueur du périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite à un arc de cercle, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés ; 2° une partie dans laquelle on démontre que *cette limite est unique*.

Le raisonnement habituel par lequel se trouve établie la première partie de cette justification, est le suivant :

« *Concevons d'abord qu'il n'y ait que deux côtés dans la ligne brisée régulière inscrite à l'arc ; puis supposons qu'on double le nombre des côtés, une fois, deux fois, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que le nombre des côtés soit exprimé par la formule* 2^n, *n croissant indéfiniment. Le périmètre croîtra constamment ; et, comme on peut facilement assigner une quantité finie au-dessous de laquelle il*

reste toujours, il tendra évidemment vers une limite. Donc, etc. »

Cette démonstration est-elle irréprochable ? De ce que le périmètre d'une ligne brisée régulière, inscrite à un arc de cercle, croît sans cesse et reste inférieur à celui d'une ligne polygonale finie, extérieure à l'arc considéré et terminée aux mêmes extrémités, peut-on conclure que ce périmètre tend vers une limite ? Il suffit, pour s'en assurer, d'appliquer à ce raisonnement le procédé, bien connu en logique, qui consiste à remplacer le terme *limite* dont on se sert ici, par la périphrase équivalente, dont ce terme tient conventionnellement la place. Or, on appelle *limite* d'une quantité variable, une *quantité constante dont la variable s'approche indéfiniment, sans jamais l'atteindre* (1), et il est aisé de reconnaître que, dans la démonstration précédente, cette qualité caractéristique d'une limite manque complètement. Il n'y est question d'aucune quantité constante dont la longueur du périmètre s'approche indéfiniment, mais seulement du périmètre d'une ligne brisée, extérieure à l'arc, qui est plus grand que celui de toutes les lignes brisées inscrites à l'arc, et qui ne peut mériter en aucune sorte la qualification de limite, telle qu'on l'entend ordinairement dans la géométrie.

On peut aussi, pour vérifier la solidité de ce raisonnement, le retourner en l'appliquant aux périmètres des lignes polygonales circonscrites : on voit tout de suite que ces périmètres vont en diminuant constamment, sans qu'ils puissent cependant tomber au-dessous de la corde qui soustend l'arc considéré. Est-ce une raison suffisante

(1) Voy. Duhamel, *Eléments de calcul infinitésimal*, pag. 9 et 223.

pour qu'on puisse conclure qu'ils tendent vers une limite? Evidemment, non.

Ce qu'il faudrait ici, c'est qu'on pût comparer la longueur variable des périmètres des lignes brisées inscrites à une quantité constante, par exemple à la longueur de l'arc, et prouver qu'ils s'en approchent indéfiniment; mais, puisque la longueur de l'arc n'existe pas encore pour ceux qui ont adopté la nouvelle définition, cette comparaison est impossible, et il faut garder la conclusion qu'ils ont tirée pour ce qu'elle vaut, ou bien reconnaître qu'ils ont péché contre cette règle établie (ch. IV), qu'on ne doit employer dans les définitions, que des termes parfaitement connus ou déjà définis. De toute façon, la première partie de la justification, propre à cette nouvelle définition, demeure incomplète.

La seconde partie de cette justification a pour but de démontrer que *la limite est unique.* Le raisonnement qu'on trouve dans les Eléments de géométrie, consiste à considérer deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit, d'un nombre n de côtés ; puis, deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit, d'un nombre n' de côtés; et à faire voir que la limite l vers laquelle tendent les périmètres des deux premiers, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés, ne peut être ni plus petite ni plus grande que la limite l' vers laquelle tendent les deux autres. Or, on reconnaît dans cette manière de raisonner, le fond même de la méthode de *réduction à l'absurde*, telle que l'employaient les anciens, et on voit aussi que l'application en est faite à un principe général, abstrait, difficile, de manière à rencontrer tous les inconvénients que cette méthode peut présenter; par conséquent, la seconde partie de la justification, propre à la nouvelle

définition, laisse aussi quelque chose à désirer. Et l'on peut dire, en résumé, qu'au point de vue de l'enseignement élémentaire, la nouvelle définition d'un arc de courbe ne possède aucune des qualités, tant générales que particulières, d'une bonne définition géométrique.

Il est aisé de comprendre qu'une vérification, en tous points semblable, des règles établies dans le chap. IV, pourrait se faire sur les définitions modernes de l'aire d'une zone, d'un cylindre et d'un cône, et que cette vérification nous conduirait à une conclusión identique.

CHAPITRE XI

Justification exacte de la définition des lignes et surfaces courbes.

La définition des lignes et surfaces courbes, imaginée par les modernes, est susceptible d'une justification exacte, qui peut se réduire à des termes assez simples, lorsqu'on convient de la débarrasser des lemmes et scolies essentiels à son complet développement. Pour satisfaire à la première partie de cette justification, on commencera par inscrire au cercle un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, et par lui circonscrire un polygone régulier semblable; puis on doublera une fois, deux fois, trois fois, et ainsi de suite, le nombre des côtés de chaque polygone. On représentera ensuite par des nombres les périmètres des polygones circonscrits, ainsi que ceux des polygones inscrits, et on établira les trois points suivants :

1° *Les premiers nombres vont tous en diminuant, les seconds vont tous en augmentant.*

2° *Tout nombre de la première série est plus grand que son correspondant de la seconde.*

3° *La différence entre deux nombres correspondants peut devenir aussi petite que l'on veut.*

Dès l'instant que ces trois conditions sont remplies, il y a une limite commune pour ces deux séries de nombres, et cette limite peut être appelée, si l'on veut, *longueur de la circonférence* ou *longueur de l'arc*. Cependant, est-il évident que deux séries de nombres qui satisfont aux trois conditions énoncées tendent vers une limite commune? Quelques géomètres acceptent cette conséquence abstraite comme vraie, sans démonstration (1). Mais, c'est à la condition de renoncer à l'idée générale que réveille le mot *limite*. On appelle *limite*, il ne faut pas l'oublier, une quantité constante dont la variable peut s'approcher indéfiniment, sans jamais l'atteindre; ce qui suppose nécessairement une comparaison directe ou indirecte entre la limite et la variable. Or, dans le cas actuel, cette comparaison, même indirecte, n'existe pas; et il faut absolument, pour que la démonstration précédente devienne rigoureuse, qu'elle soit complétée, comme l'ont proposé plusieurs savants (2); voici ce complément:

Considérons deux séries de nombres satisfaisant aux trois conditions énoncées; supposons que ceux de la première série représentent des longueurs comptées, à partir d'une origine fixe, sur une droite, et que ceux de la seconde série représentent aussi des longueurs comptées sur la même droite, à partir de la même origine. Cette supposition est toujours possible, quelle que soit l'espèce de grandeurs que ces nombres représentent, pourvu que l'espèce en soit la même.

(1) Voy J.-A. Serret, *El. d'Arithm.*, 4e éd., p.137. Briot, *Leç. nouv. d'Arithm.*, 3e éd., p. 196. Ch. Simon, *Précis d'Arithm.*, p. 182.

(2) Voy. E. Burat, *Traité d'Arithm.*, pag. 202. Voy. J. Bertrand, *Trait. d'Arithm.*, chap. X.

Il résulte des trois conditions auxquelles satisfont ces deux séries de nombres, que: 1° les extrémités des longueurs de la première série iront en se rapprochant de l'origine, tandis que les extrémités des autres s'en éloigneront de plus en plus; 2° les extrémités des longueurs de la première série ne s'entremêleront jamais avec les extrémités des autres; 3° la distance qui sépare les extrémités de deux longueurs correspondantes, dans l'une et l'autre série, deviendra aussi petite que l'on voudra.

On conclut de là qu'il n'y a pas d'intervalle entre les deux régions de la droite sur lesquelles tombent les extrémités des longueurs de la première série et celles de la seconde, et qu'entre ces deux régions il existe seulement *un point*, dont la distance à l'origine possède toutes les qualités requises pour être une *limite* commune aux deux séries de nombres considérées.

Pour satisfaire à la seconde partie de la justification, il suffit de faire voir que deux séries de nombres, remplissent les trois conditions énoncées, tendent vers la même limite que deux autres séries de nombres, remplissant les mêmes conditions. Rien ne s'oppose ici à l'emploi de la méthode de réduction à l'absurde; car, les nombres dont il s'agit étant assujétis, dans la démonstration, à représenter des longueurs rectilignes, on se trouve en présence d'une question spéciale, concrète et facile, dans laquelle la méthode de réduction à l'absurde ne souffre aucune difficulté. . . . .

La définition de la longueur d'une ligne courbe se trouve ainsi justifiée d'une manière exacte et précise.

Cette justification est très-générale; elle peut s'appliquer mot à mot non-seulement à la définition de la longueur d'un arc, mais encore à celle de l'aire d'une sur-

face courbe et à celle du volume d'un corps rond. Elle se réduit, d'ailleurs, à des termes assez simples, si l'on convient de la débarrasser du complément par lequel on démontre que deux séries de nombres, satisfaisant aux trois conditions énoncées, tendent vers une limite commune et unique. Mais ce complément, pour peu qu'on réfléchisse à la question, paraît être indispensable.

Au surplus, on ne saurait raisonner en laissant, dans chaque cas particulier, les deux séries de nombres représenter, jusqu'à la fin de la démonstration, les grandeurs mêmes que l'on considère au point de départ, sans que la démonstration perdît toute sa simplicité et sa précision ; car, s'il est facile de suivre sur une droite les deux régions de cette droite, où tombent les extrémités des longueurs rectilignes comptées à partir d'une même origine, il est difficile d'envisager de la même manière et de comparer entre elles les deux régions du plan ou de l'espace, sur lesquelles tomberaient des surfaces développées ou des volumes polyédraux.

Remarquons, en terminant, que la justification qui précède revient à démontrer les deux points suivants : 1° un arc de courbe a une longueur, puisque cet arc peut être rectifié et que la chose est évidente pour une ligne droite ; 2° la définition de l'aire d'une surface courbe et celle du volume d'un corps rond peuvent se ramener à la définition de la longueur d'une ligne. C'est précisément en sens inverse qu'il faut s'attacher à suivre cet ordre d'idées, pour obtenir une simplification réelle dans les questions relatives à la mesure des lignes et surfaces courbes; on le démontre dans le chapitre suivant.

CHAPITRE XII

Méthode Euclidienne dans la mesure des lignes et surfaces courbes

L'établissement des principales propriétés des lignes et surfaces courbes présente, dans la Géométrie élémentaire, une difficulté d'un caractère spécial. Cette difficulté a été sentie par Euclide, et surmontée à grand peine par Legendre ; les géomètres modernes ont vainement essayé de la tourner, parce qu'ils n'en ont pas assez attentivement étudié l'origine. L'origine de cette difficulté est tout entière dans la position même qui est assignée, dans les Eléments, aux propriétés des lignes et surfaces courbes. Ces propriétés, en effet, y sont démontrées presque toutes, en vue de la mesure d'une ligne ou de la quadrature d'une surface ou de la cubature d'un volume, et qui dit question de mesure dit question de calcul; en d'autres termes, question essentiellement pratique. Or, il ne faut pas oublier que, dans une question pratique, la meilleure solution, c'est-à-dire la plus simple, on l'a vu dans le chapitre VI, n'est pas nécesssairement celle qui est la plus conforme à l'ordre logique des idées.

La logique nous conduit, sans contredit, à placer la théorie des lignes avant celle des surfaces, et celle des surfaces avant celle des volumes; et l'on ne saurait approuver l'idée qui consisterait à déduire les propriétés des surfaces de celles des volumes, et celles des lignes de celles des surfaces. « La théorie des lignes proportionnelles, dit S.-F. Lacroix, déduite de la comparaison des aires des triangles, comme dans les Éléments d'Euclide et dans quelques ouvrages modernes (1), constitue une espèce de désordre dont beaucoup de bons esprits ont le droit d'être choqués. »

Mais, s'il s'agit de mesurer l'étendue de certaines figures, il en est tout autrement. Comme cette mesure se traduit nécessairement par des opérations graphiques ou arithmétiques, en d'autres termes, par une opération pratique, les lois de cette mesure seront d'autant plus difficiles à établir, que la figure mesurée aura une existence plus abstraite. Il est certain d'ailleurs, qu'à l'idée de ligne géométrique, se rattache une abstraction de plus qu'à celle de surface, et deux de plus qu'à celle de volume (chapitre VII). Donc, on devra considérer, d'une manière générale, les principes relatifs à la mesure des lignes comme plus difficiles que ceux qui se rapportent aux aires, et ces derniers comme plus difficiles que ceux qui ont trait à la mesure des volumes; et il pourra même arriver que, dans quelques-unes de ces questions pratiques, la meilleure solution soit en contradiction apparente avec l'ordre logique des idées. C'est ainsi qu'on peut s'expliquer pourquoi la méthode élémentaire, choisie par Legendre comme la plus simple pour le calcul du

(1) Voy. M. A. Blanchet, *Eléments de Géométrie*, 3e édition, 1859.

nombre π, est la *méthode des aires* (1), et pourquoi presque toutes les méthodes élémentaires ne valent rien dans les questions de calcul un peu difficiles. On voit aussi par là, comment la difficulté inhérente aux propositions, à l'aide desquelles la mesure de la circonférence se ramène à celle des polygones inscrits ou circonscrits, n'est pas levée, mais seulement déplacée, par le choix d'une nouvelle définition ; cette difficulté en est totalement indépendante, puisqu'elle tire son origine de la position même qui est assignée à la question dans les Eléments de géométrie.

Si la difficulté de la mesure des lignes et surfaces courbes peut être diminuée, ce ne sera qu'en procédant comme le faisait Euclide, c'est-à-dire en mettant en jeu, dans les lemmes relatifs à la mesure de la circonférence, la considération directe de la surface du cercle aussi bien que celle de sa circonférence, et, dans les lemmes de la mesure des corps ronds, la considération directe du volume de ces corps aussi bien que celle de leur surface. On ne saurait sans doute approuver Euclide de s'être engagé trop avant dans cette voie, et d'avoir usé du même procédé dans des questions purement théoriques ; mais, sa remarquable sagacité est un exemple à suivre dans toutes les questions de géométrie pratique.

Voici comment devront procéder, en toute rigueur, ceux qui admettent, avec Euclide, que la longueur d'un arc et l'aire d'un cercle sont suffisamment définies par la définition même de l'arc et par celle du cercle, pour démontrer, sans préliminaires d'aucune sorte, que *la sur-*

(1) Voy. Legendre, *Eléments de Géométrie*, 15e édition, Liv. IV, Prop. XIV et suiv.

face d'un cercle est la limite vers laquelle tend celle d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit au cercle, et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Supposons qu'on ait inscrit à un cercle un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, et qu'on lui ait circonscrit un polygone régulier semblable. La différence des aires de ces deux polygones peut devenir aussi petite qu'on voudra, si l'on double indéfiniment le nombre de leurs côtés ; en effet, on a démontré antérieurement, que les aires de deux polygones réguliers du même nombre de côtés, sont proportionnelles aux carrés de leurs apothèmes, et l'on déduit facilement de cette proportion, que la différence des aires devient, comme celle des carrés des apothèmes, aussi petite que l'on veut, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de chaque polygone. Or, la surface du cercle (mesurée ou non) est évidemment comprise entre les aires des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, du même nombre de côtés, et quel que soit le nombre de ces côtés. Donc, si le nombre des côtés des deux polygones réguliers augmente indéfiniment, les aires des deux polygones s'approchent indéfiniment l'une de l'autre, et, à plus forte raison de la surface du cercle, sans pouvoir jamais l'atteindre ; en d'autres termes, l'aire de chacun des polygones réguliers a pour limite la surface du cercle auquel il est inscrit ou circonscrit.

On en déduira comme corollaire que *la circonférence d'un cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit au cercle, et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment ;* autrement, la surface du cercle ne serait pas la limite de l'aire de ce polygone.

Un lemme analogue peut se démontrer ainsi, sans aucune difficulté, pour le volume des corps ronds (1), avec un corollaire semblable pour la surface des mêmes corps.

(1) Voy., au surplus, nos *Eléments de Géométrie*, 3e éd., pages 289, 304, 341.

CHAPITRE XIII

Définition d'un maximum et d'un minimum.

On dit, d'une manière générale, qu'une quantité variable a une valeur *maximum* ou *minimum*, si cette valeur est plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement, et l'image la plus saisissante qu'on puisse donner de cette définition est celle d'une ligne courbe dont les points se rapprochent d'une droite fixe pour s'en éloigner ensuite, ou inversement. Cette définition, qui est naturelle, n'a pas besoin de plus ample justification, car on rencontre au début du livre II de la géométrie des exemples nombreux de grandeurs variables, pouvant satisfaire à la double condition qui sert à définir un maximum ou un minimum.

Pour déterminer la valeur maximum ou minimum d'une quantité variable, il y a, au point de vue élémentaire, deux marches différentes à suivre : la synthèse et l'analyse.

La synthèse ou *méthode géométrique* consiste à trouver, comme on le peut, et d'après les conditions mêmes expo-

sées dans l'énoncé du problème, la valeur maximum ou minimum demandée, et à démontrer ensuite, en vertu des propriétés géométriques de la figure, que cette valeur est effectivement plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

L'analyse ou *méthode algébrique* peut se résumer dans la règle suivante : choisissez une inconnue dont la quantité qui doit être, s'il y a lieu, maximum ou minimum, soit une fonction, et déterminez la valeur de l'inconnue pour laquelle cette fonction est égale à une grandeur arbitraire qu'on suppose donnée; la discussion de la solution du problème ainsi résolu fera savoir si la grandeur arbitraire, qu'on suppose donnée, est assujétie à être choisie entre certaines limites, lesquelles se réduiront au plus à deux : ce sont ces deux limites, s'il y en a, qui sont le maximum et le minimum demandés.

On peut faire à cette méthode algébrique une objection, c'est que le maximum et le minimum qu'elle fournit ne sont pas exactement ce qu'ils ont été définis d'une manière générale; on ne voit pas clairement, en effet, comment on peut, de l'existence d'une limite aux valeurs de la fonction qui correspondent à toutes les valeurs réelles possibles de la variable indépendante, conclure à l'existence d'une valeur de cette fonction, plus grande ou plus petite que toutes celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement. Il semble que la rencontre du maximum et du minimum, dans la discussion du problème qu'on a résolu, soit toute fortuite et artificielle, ou, si l'on veut, qu'il y ait une espèce de lacune entre la définition générale et le résulat particulier donné par la méthode algébrique.

Cette lacune peut être comblée, dans chaque cas, par un raisonnement qui consiste à s'assurer *à posteriori* que les limites trouvées pour la fonction, dans la discussion du problème, satisfont à la double condition qui sert à définir un maximum ou un minimum (1).

Supposons, par exemple, qu'on soit conduit à chercher la valeur de x qui rend maximum ou minimum une fonction de la forme suivante :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

On posera et on résoudra, d'après la règle, l'équation :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m:$$

puis, on discutera la solution du problème qui se traduit par cette équation. Dans cette discussion, trois cas principaux peuvent se présenter, savoir : $b'^2 - 4\,a'c'$ est nul; $b'^2 - 4\,a'c'$ est positif; $b'^2 - 4\,a'c'$ est négatif.

Dans le premier cas, on trouve pour x des valeurs réelles, si le terme $bb' - 2\,(ac' + ca')$ est positif, toutes les fois qu'on prend pour m une valeur plus petite qu'une valeur déterminée que nous appellerons m'; cette valeur déterminée m' étant la plus grande qu'on puisse choisir pour m sans que la racine de l'équation cesse d'être réelle, on dit alors que m' est pour la fonction considérée une *valeur maximum*, correspondant à une valeur x' de la variable qu'on calcule par la formule de résolution.

(1) Voyez *Le Conseiller de l'Enseignement public*, du 15 octobre 1859. Voyez Joseph Bertrand, *Traité d'Algèbre*, 3e édition, 1863, p. 353.

Il est aisé de s'assurer que cette valeur m' satisfait à la définition générale d'un maximum. En effet, si l'on suppose que x ait une valeur peu différente de x' et plus petite, la fonction considérée prendra, en vertu de sa continuité, une valeur peu différente de m', mais *plus petite*, car elle ne peut pas en prendre une plus grande sans que la valeur correspondante de x soit imaginaire; si l'on suppose, au contraire, que x ait une valeur peu différente de x' et plus grande, la fonction prendra une valeur peu différente de m', mais *plus petite*, puisqu'elle ne peut pas en prendre une plus grande sans que la valeur correspondante de x soit imaginaire. Il en résulte que la fonction prend, pour cette valeur x' de la variable, une valeur m' plus grande que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

On trouvera de même que si le terme $bb' - 2(ac' + ca')$ est négatif, la fonction prendra, pour une certaine valeur de x, une valeur plus petite que celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement.

Chacune de ces deux valeurs de la fonction satisfait donc à la définition générale d'un maximum ou d'un minimum.

Dans le second cas, la méthode algébrique ne donne pas de maximum ni de minimum, si les racines de l'équation, qu'on obtient en égalant à zéro le trinôme placé sous le radical, sont imaginaires ou égales; attendu qu'on trouve pour x des valeurs réelles, quelle que soit la valeur qu'on choisisse pour m. Mais, si les racines du trinôme sont réelles et inégales, on trouve pour x des valeurs réelles toutes les fois qu'on prend pour m une valeur non comprise entre les deux racines m' et m'' du trinôme; on dit alors que la plus petite m' des deux racines

est, pour la fonction considérée, une *valeur maximum* et la plus grande m'' une *valeur minimum*, correspondant à une valeur de la variable qu'on calcule par la formule de résolution. Or, il est aisé de s'assurer que ces deux valeurs m' et m'' satisfont à la définition générale, l'une d'un maximum et l'autre d'un minimum; car, on peut répéter textuellement, en s'appuyant sur la continuité de la fonction, le raisonnement qu'on a fait dans le premier cas.

Dans le troisième cas, la méthode algébrique ne donne pas de maximum ni de minimum, si les racines du trinôme placé sous le radical sont égales ou imaginaires, attendu qu'on trouve pour x des valeurs imaginaires, quelle que soit la valeur qu'on choisisse pour m. Mais, si les racines du trinôme sont réelles et inégales, on trouve pour x des valeurs réelles toutes les fois qu'on prend pour m une valeur comprise entre les deux racines m' et m'' du trinôme; on dit alors que la plus petite m' des deux racines est, pour la fonction considérée, une *valeur minimum* et la plus grande m'' une *valeur maximum*, correspondant à une valeur de la variable qu'on calcule par la formule de résolution. Or, il est aisé de s'assurer que ces deux valeurs m' et m'' satisfont à la définition générale, l'une d'un minimum et l'autre d'un maximum; car, on peut répéter encore textuellement, en s'appuyant sur la continuité de la fonction, le raisonnement qu'on a fait dans le premier cas.

En résumé, pour justifier la définition d'un maximum ou d'un minimum, telle qu'on la prend accidentellement dans la théorie algébrique, il est indispensable de démontrer, comme on vient de l'indiquer, que dans tous les

cas où la méthode élémentaire accuse l'existence d'un maximum ou d'un minimum, les valeurs obtenues par cette méthode satisfont à la définition générale, qui seule est vraiment naturelle.

CHAPITRE XIV

Définition arithmétique du nombre.

Toutes les transformations ou opérations de l'arithmétique s'exécutant sur des nombres, il est clair que ces opérations ne peuvent avoir un sens précis et général qu'à la condition que le mot *nombre* y soit pris lui-même avec un sens précis et général. Mais, d'un côté, si la première idée que nous ayons du nombre nous vient de la pluralité d'objets de même espèce ou de la répétition du même phénomène, d'un autre côté, cette idée ne trouve son complet développement que dans la question de la mesure des grandeurs : un nombre est, dans toute la force du terme, l'expression du résultat de la comparaison d'une grandeur à une unité de même espèce. L'existence générale des nombres est donc subordonnée à l'opération, matérielle ou fictive, par laquelle se traduit cette comparaison d'une grandeur quelconque à l'unité de même espèce.

Examinons ce que peut donner, au point de vue élémentaire, cette comparaison, et bornons-nous à faire cet examen *sous le rapport de la quantité*, en laissant de côté

les rapports de position qui peuvent exister entre une grandeur et son unité. L'expression du résultat ne sera autre chose que la définition arithmétique du nombre.

Sous le rapport de la quantité, il peut se présenter, dans la mesure d'une grandeur, trois circonstances distinctes et pas davantage.

Premièrement, la grandeur peut contenir une ou plusieurs fois exactement l'unité; le résultat s'exprime par un nombre, qu'on nomme *entier*.

Secondement, la grandeur peut contenir exactement une ou plusieurs fois une partie aliquote finie de l'unité, ce qui s'exprime par un nombre *fractionnaire*.

Troisièmement, la grandeur ne contient pas exactement une ou plusieurs fois l'unité, ni aucune partie aliquote finie de l'unité; évidemment, cette circonstance ne peut pas se traduire par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire. On donne à l'expression de ce dernier résultat le nom de nombre *incommensurable* ou *irrationnel*. Il est d'ailleurs presque indifférent de savoir si ce mot est mal choisi et peut donner lieu à des équivoques; l'important, c'est qu'il soit bien établi que ces circonstances diverses peuvent se présenter toutes les trois, dans la mesure des grandeurs.

Or, il est de toute évidence que les deux premiers cas peuvent se rencontrer; quant au troisième, le raisonnement et l'expérience s'accordent à démontrer qu'il peut se rencontrer comme les deux premiers.

Le raisonnement le démontre; car, l'esprit n'éprouve aucune difficulté à admettre, vu la continuité des grandeurs mathématiques, que l'opération commencée, pour trouver la plus grande commune mesure de deux gran-

deurs, puisse se poursuivre indéfiniment (1). Sans doute, l'imperfection des instruments et d'autres obstacles matériels imposeront des bornes à cette recherche; mais un effort d'esprit des plus simples nous permet d'étendre la vue au delà de ces bornes, et d'affirmer la possibilité de continuer l'opération, si loin qu'on la suppose prolongée. Or, si l'opération de la mesure d'une grandeur peut être, par la pensée, indéfiniment prolongée, l'expression fidèle du résultat de cette mesure ne saurait être un nombre entier, ni un nombre fractionnaire; autrement, la plus grande commune mesure entre cette grandeur et l'unité se trouverait déterminée après un nombre limité d'opérations; donc, le troisième cas que nous avons signalé, dans la mesure des grandeurs, peut se rencontrer aussi bien que les deux premiers.

L'expérience le démontre aussi; il suffit de citer, à l'appui de cette assertion, le résultat auquel on est conduit, quand on mesure la diagonale d'un carré avec le côté de ce carré pour unité, ou la diagonale d'un cube avec l'arête de ce cube pour unité, ou la circonférence d'un cercle avec le rayon du cercle pour unité. Mais, la première preuve, quoique résultant d'une simple conception de l'esprit, est suffisante. Il y a donc bien trois sortes distinctes de nombres, sous le rapport de la quantité; car, il y a trois sortes possibles de résultats à exprimer, dans la mesure des grandeurs.

D'un autre côté, il est hors de doute que, si l'on réserve la qualification de nombre pour le cas où la comparaison d'une grandeur avec l'unité de même espèce aboutit aux deux premiers résultats, le troisième résultat ne mérite

(1) Voy. Ch. Simon. *Précis d'Arithmétique*, page 117.

plus le nom de nombre, puisqu'il est absolument distinct des deux premiers, et l'on est en droit d'énoncer ce paradoxe : *un nombre incommensurable n'est pas un nombre*. De même, si l'on convient de dire qu'un nombre n'existe pas à moins qu'il ne soit composé d'unités ou de parties aliquotes finies de l'unité, on pourra soutenir avec raison que *les nombres incommensurables n'existent pas*. Cette formule est encore, comme la précédente, purement paradoxale. On pourrait aisément aller plus loin, dans cette voie, et dire aussi qu'*un nombre fractionnaire n'est pas un nombre*.

Mais, s'il est tout à fait contraire à l'esprit des mathématiques de restreindre la signification du mot nombre au premier sens de nombre entier, il ne l'est pas moins de penser qu'un nombre n'a d'existence réelle qu'à la condition d'être une agrégation de parties aliquotes finies de l'unité. Un nombre est essentiellement, nous l'avons dit, l'expression du résultat de la mesure d'une grandeur; d'ailleurs, les trois circonstances que nous avons rencontrées et rapportées plus haut, peuvent se produire indifféremment, dans la mesure d'une grandeur, et ces trois circonstances sont distinctes les unes des autres. Il est donc nécessaire qu'il y ait, sous le rapport de la quantité, trois sortes correspondantes de nombres et pas davantage : 1° les nombres *entiers;* 2° les nombres *fractionnaires;* 3° les nombres *incommensurables;* ces derniers n'ayant d'autre qualité générale que celle d'exprimer la mesure d'une grandeur qui n'est pas un multiple de l'unité, ni d'une partie aliquote finie de l'unité, c'est-à-dire d'une grandeur incommensurable avec l'unité.

Remarquons que, dans la mesure des grandeurs, le cas qui se présente le plus généralement, toutes choses

égales d'ailleurs, est précisément le dernier, tandis que les deux autres n'en sont que des accidents. L'existence des nombres incommensurables se trouve liée, en effet, à une propriété caractéristique des grandeurs mathématiques, savoir: la continuité; tandis que les nombres commensurables, résultant tous de cette hypothèse particulière que l'opération entreprise pour la mesure d'une grandeur réussit après quelques essais, ces nombres sont indépendants de cette propriété. D'où l'on conclut que, s'il y a quelque raison d'enlever le nom de nombre à l'un des trois résultats, auxquels peut aboutir la mesure d'une grandeur, c'est plutôt aux deux premiers qu'au troisième qu'on devrait le faire.

Toutefois, on ne saurait oublier que la continuité d'une grandeur est une propriété purement idéale, en ce sens qu'il n'y a pas, dans la nature, de grandeur qui soit matériellement continue. Cette continuité n'existe que dans l'imagination du géomètre, qui attribue, par la pensée, aux corps du monde extérieur des qualités parfaites, que ces corps n'ont pas ou qu'ils ont seulement à un très-faible degré, mais qui lui permettent de simplifier ses recherches et d'en généraliser les résultats. C'est pourquoi, si l'on veut rester dans le véritable esprit de la genèse mathématique, il sera bon de tenir compte de cette observation dans la pratique de l'enseignement, et de graduer, comme on le fait dans beaucoup de théories géométriques, les difficultés de l'étude des nombres.

On commencera l'arithmétique par l'examen des circonstances les plus simples et qui se trouvent dans la nature. La nature nous offre des collections d'objets de même espèce et la répétition du même phénomène : telle sera l'origine de la première définition du nombre.

La définition du nombre, tirée ainsi de l'idée de pluralité et indépendamment de toute idée de mesure, sera maintenue jusqu'à ce que la question de la mesure des grandeurs nous oblige à formuler la définition d'une fraction. Les fractions seront encore appelées des nombres, car l'opération qui leur donne naissance comprend aussi, comme cas partioulier, les nombres déjà étudiés auparavant; on les distinguera, d'ailleurs, les uns des autres par les épithètes d'*entiers* ou de *fractionnaires*.

Enfin, si l'on envisage la question de la mesure des grandeurs d'une manière plus générale, on est obligé d'admettre que les nombres entiers et les fractions ne sont que des résultats accidentels dans cette opération, car il y a des grandeurs incommensurables avec l'unité. Or, le résultat de la mesure de ces grandeurs doit pouvoir s'exprimer par un nombre, si l'on veut que l'idée de nombre soit générale. De là, l'origine de toute une nouvelle classe de nombres, qu'on nomme *incommensurables*, et qui représentent de la manière la plus complète l'expression de la comparaison d'une grandeur quelconque avec l'unité de même espèce, sous le rapport de la quantité.

Tel est aussi, à peu près, l'ordre méthodique qui ressort de la disposition adoptée dans les programmes officiels, pour l'enseignement classique des lycées de France (1).

(1) Voyez *Plan d'études*, enseignement secondaire classique, programme 2.

CHAPITRE XV

Définition particulière du nombre incommensurable

La seule qualité générale des nombres incommensurables est d'exprimer la mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité, c'est-à-dire d'une grandeur qui n'est pas un multiple de l'unité, ni d'aucune partie aliquote finie de l'unité. Est-ce à dire que cette qualité, qui correspond à une propriété des grandeurs, en quelque sorte négative, puisse suffire complètement aux besoins du calcul? En aucune façon. Cette qualité est satisfaisante au point de vue théorique de la définition générale des nombres incommensurables, en ce sens, que le mot *incommensurable*, appliqué aux nombres, signifie un résultat possible et précis au même degré que les deux autres; absolument comme il suffit, en géométrie, de définir d'abord et d'une manière générale, une ligne courbe, en disant qu'elle n'est ni droite, ni brisée.

On peut même déduire de cette définition générale, certaines propriétés des nombres, incommensurables ou non, qui en dépendent exclusivement. Ainsi, par exemple,

si deux lignes égales sont incommensurables avec la même unité, les deux nombres qui exprimeront leur longueur sont égaux ; de même, si l'une est plus grande que l'autre, l'un des deux nombres est plus grand que l'autre ; si l'une est un multiple ou une partie aliquote de l'autre, il en est de même des deux nombres. Rien ne s'oppose même à ce qu'on puisse, dans la pratique, renverser les termes d'une semblable proposition et affirmer que, si deux nombres exprimant la mesure de deux grandeurs faite avec la même unité sont reconnus égaux, les deux grandeurs dont il s'agit sont égales, sous le rapport de la quantité. Mais, cette dernière conclusion n'est vraie que comme un fait essentiellement pratique, et ce serait prendre la question à rebours, que de vouloir tirer de ce fait, comme l'ont tenté quelques géomètres, la définition de l'équivalence des grandeurs mathématiques. La théorie de l'équivalence de deux grandeurs est, en principe, totalement indépendante de l'évaluation numérique de ces grandeurs.

Pour faire entrer dans le calcul arithmétique un nombre incommensurable, c'est-à-dire pour en formuler la définition particulière, il faut et il suffit qu'on ait démontré que ce nombre possède une qualité positive et caractéristique, qui permette d'envisager à chaque instant sa composition, par rapport à l'unité, et d'en distinguer tous les autres nombres, sans être obligé de remonter à la comparaison des grandeurs dont la mesure les a engendrés. Cette propriété se trouvera mise en évidence, comme pour les nombres commensurables, par l'analyse des circonstances spéciales qui, dans la mesure des grandeurs, accompagnent la naissance de chaque nombre incommensurable ; le résultat de cette analyse devra être

fixé de telle sorte qu'il ne reste, dans le calcul, aucune trace des grandeurs que les nombres représentent, ni du procédé qui a servi à déterminer leur manière d'être relativement à l'unité.

Analysons ces circonstances, et, pour préciser la démonstration, choisissons comme exemple la racine carrée du nombre 2 : nous serons amenés à formuler pour ce nombre deux sortes de définition.

Première définition. — On fait voir, en arithmétique, qu'il n'y a pas de nombre entier, ni fractionnaire, qui élevé au carré donne 2. Mais, si l'on partage l'intervalle de 1 à 2 en dixièmes, et si l'on fait successivement le carré des nombres : 1; 1,1; 1,2; 1,3; etc.; on en trouve deux consécutifs dont les carrés comprennent entre eux le nombre 2, savoir : 1,4 et 1,5. De même, si l'on partage l'intervalle de 1,4 à 1,5 en centièmes, et si l'on fait successivement le carré des nombres : 1,4; 1,41; 1,42; 1,43; etc.; on en trouve deux consécutifs dont les carrés comprennent entre eux le nombre 2, savoir : 1,41 et 1,42; et ainsi de suite. De telle sorte que le nombre 2 reste compris entre les carrés des nombres correspondants, dans les deux séries :

	(1)	2	1,5	1,42	1,415, etc.
et	(2)	1	1,4	1,41	1,414, etc.

Or, ces deux séries de nombres, satisfont aux trois conditions suivantes :

1° Les premiers vont tous en diminuant; les seconds vont tous en augmentant.

2° Tout nombre de la première série est plus grand que son correspondant dans la seconde.

3° La différence entre deux nombres correspondants peut devenir aussi petite que l'on veut.

Et l'on sait que deux pareilles séries de nombres, dès l'instant que les trois conditions énoncées sont remplies, tendent vers une limite commune; il suffit, pour s'en convaincre de remonter du nombre considéré sous la forme abstraite, à la plus simple des grandeurs concrètes que le nombre peut représenter (chap. XI).

Il en est de même des deux séries :

	(3)	2^2	$1,5^2$	$1,42^2$	$1,415^2$, etc.
et	(4)	1^2	$1,4^2$	$1,41^2$	$1,414^2$, etc.

Ces deux séries de nombres satisfont évidemment aux deux premières conditions énoncées; elles satisfont aussi à la troisième. En effet, la différence des carrés de deux nombres est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence; or, la somme de deux nombres correspondants est toujours inférieure à 4, et leur différence peut devenir aussi petite que l'on veut, comme on le voit dans les premières séries (1) et (2); donc, les séries (3) et (4) tendent vers une limite commune. D'ailleurs, le nombre 2 reste compris entre deux termes correspondants de ces mêmes séries; le nombre 2 est donc la limite vers laquelle tendent les termes de ces deux séries.

On peut conclure de ce qui précède, qu'il existe une limite vers laquelle tendent les nombres décimaux, dont les carrés ont eux-mêmes pour limite le nombre 2; puisque cette limite existe, et qu'elle est d'ailleurs indépendante de la forme décimale que nous avons adoptée pour les termes des séries considérées, on pourra nommer

cette limite *racine du nombre* 2, l'écrire $\sqrt{2}$ et introduire cette expression $\sqrt{2}$ dans les calculs, en la regardant toujours comme définie, par cette propriété d'être la *limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont les carrés ont pour limite le nombre* 2.

Deuxième définition. — Il est naturel de se demander pourquoi, la racine de 9 étant le nombre qui élevé au carré donne 9, la racine de 2 n'est pas définie de la même manière ? Pour qu'on fût en droit de garder pour le second cas la même définition que pour le premier, il suffirait de démontrer qu'il existe un nombre qui, élevé au carré, donnerait le nombre 2, comme il y en a un qui élevé au carré donne 9. Or, si l'on se rappelle qu'un nombre quelconque exprime la mesure d'une grandeur, d'une ligne par exemple, et si l'on sait ce qu'il faut entendre par l'existence d'un nombre, il est certain qu'il y a une longueur, quelle que soit l'unité choisie, dont le carré est plus petit que 2, et une autre dont le carré est plus grand ; par conséquent, si l'on suppose que la longueur d'une ligne aille en croissant continuellement, depuis la plus petite des deux jusqu'à la plus grande, il y aura, en vertu de cette continuité même, une longueur intermédiaire dont le carré sera précisément égal à 2. C'est le nombre exprimant la mesure de cette longueur, lequel existe (Chap. XIV), qu'on appellera *racine de* 2, qu'on écrira $\sqrt{2}$ et qu'on introduira dans les calculs, en le regardant toujours comme défini par cette propriété d'être *le nombre qui élevé au carré donnerait* 2.

CHAPITRE XVI

Choix de la définition des nombres incommensurables.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la racine d'un nombre qui n'est pas carré parfait peut être définie, comme limite de nombres fractionnaires satisfaisant à certaines conditions, ou comme jouissant de cette propriété que son carré doit reproduire le nombre considéré.

Si l'on se reporte aux conditions générales et particulières d'une bonne définition géométrique (chap. IV), on reconnaîtra sans peine qu'il est permis, en toute rigueur, de choisir celle qu'on veut de ces deux définitions, pourvu qu'on l'ait auparavant justifiée par une démonstration. En adoptant la première, il sera nécessaire de s'y tenir attaché exclusivement, dans la suite des calculs, ce qui entraîne des longueurs de raisonnement, à moins qu'on ne démontre une fois pour toutes que cette limite possède la propriété qui sert de seconde définition. En choisissant la seconde, on évitera l'inconvénient des longueurs ; mais on sera forcé, dans les applications numé-

riques, de remplacer finalement une racine quelconque par le résultat de sa décomposition en unités décimales de différents ordres. Sous le rapport de l'économie des propositions, il n'y a donc aucun avantage à préférer l'une à l'autre ; on pourrait même, sans pêcher contre la rigueur, comprendre sous une seule définition les deux qualités distinctes que nous avons étudiées séparément.

Mais, sous le rapport de l'enseignement, on ne saurait, après avoir défini la racine de 9 comme étant *le nombre dont le carré est égal à* 9, trouver naturel de définir celle de 2 comme la limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont le carré a pour limite 2. Cette vue est exacte, arithmétiquement parlant, on ne saurait le contester, mais trop peu simple et trop peu naturelle pour servir de définition ; et, puisqu'elle est d'ailleurs indispensable aux développements du calcul numérique, ce sera sous forme de considération, sous forme de théorème, que cette manière de voir trouvera la place qui lui convient, à la suite de la théorie de l'extraction des racines.

C'est ainsi qu'on procède (chap. IX) dans l'étude de la circonférence et du cercle, et, en général, dans l'étude des lignes courbes, avec cette différence que, la théorie des racines se présentant tout d'une pièce dans les programmes d'enseignement, il peut y avoir des inconvénients moindres à en intervertir les définitions et les propositions, en même temps que les auteurs éprouvent une plus forte tentation de le faire.

C'est ainsi qu'on procède également, en définitive, dans l'étude des nombres fractionnaires. Il ne vient à l'esprit de personne, à moins d'être exclusivement tourné vers des idées d'utilité pratique, de faire passer la définition

et l'étude des fractions décimales, avec le cortège de leurs périodes, avant celle des fractions ordinaires. Toutes ces analogies entre les différentes parties du cours de mathématiques doivent, autant que possible, être maintenues.

Le développement d'une racine en fraction décimale, fait ainsi après coup, pourra donner lieu à des rapprochements curieux.

On sait que tout nombre commensurable peut s'écrire sous la forme de fraction décimale, à la manière des nombres incommensurables. Ainsi, par exemple, le nombre 1 peut s'écrire : 0,999....; le nombre $\frac{3}{4}$ peut s'écrire: 0,75 ou 0,74999:...., et cette représentation décimale n'est qu'un cas particulier de la représentation plus générale d'un nombre fractionnaire quelconque sous la forme de progression géométrique décroissante.

Mais, d'une part, l'expression décimale d'un nombre entier ou fractionnaire diffère essentiellement de celle d'un nombre incommensurable, en ce que la première n'a qu'un nombre limité de chiffres, ou que, si elle en a un nombre illimité, cette expression est caractérisée par une certaine périodicité dans les chiffres, qui manque absolument dans la seconde; d'autre part, cette analogie de forme, dans le calcul numérique, démontre *à posteriori* l'existence théorique des trois sortes de nombres que nous avons constatées (chap. XV), et la nature toute accidentelle et particulière de ceux qui appartiennent aux deux premières catégories, c'est-à-dire des nombres commensurables.

Cette analogie de forme se poursuit encore au point de vue général de l'algèbre. Tout nombre commensurable a, pour les besoins du calcul algébrique, une repré-

sentation brève, résumée par un chiffre ou par un petit nombre de chiffres, avec un signe; cette forme simple, qui se prête beaucoup mieux aux transformations du calcul que la forme décimale, se montre à l'origine même de chaque nombre commensurable, et n'est autre chose que la sténographie de sa définition; elle équivaut, d'ailleurs, à la décomposition, décimale ou non, du nombre en une infinité de chiffres.

Il en est exactement de même des nombres incommensurables, si on les introduit dans le calcul à l'aide de la seconde définition : la racine de 2, par exemple, peut être représentée numériquement par une suite indéfinie de chiffres décimaux; mais cette racine aura aussi sa forme brève, résumée par un chiffre et un signe, laquelle apparaît en même temps que le nombre, équivaut à la première et se prête infiniment mieux qu'elle aux transformations algébriques. On lui donne un corps en écrivant $\sqrt{2}$, et, en disant que c'est le nombre dont le carré est égal à 2, on énonce à la fois sa qualité générale de nombre incommensurable et sa qualité particulière, qui suffit aux transformations algébriques, d'avoir pour carré le nombre 2.

Sans doute, cette définition n'a pas l'avantage de rappeler la série des opérations successives qu'il faut faire sur l'unité, pour composer la racine du nombre; mais, pourvu qu'il ait été établi que cette composition est possible, quels que soient le nombre, la nature et l'ordre des opérations nécessaires, il est permis de prendre le résultat de ces opérations, fussent-elles purement idéales, pour objet d'une définition.

Au surplus, l'objection peut être faite à la première définition avec autant de force qu'à la seconde; si loin

qu'on considère les termes de la série : 1 1,4 1,41 1,414.... il faudra absolument s'arrêter à un terme, dans cette énumération, et ce n'est que par une simple vue de l'esprit qu'on pourra atteindre la limite vers laquelle ils tendent. En dernière analyse, prendre cette limite pour définition, après avoir prouvé qu'elle existe, c'est encore accepter, quoi qu'on dise, le résultat d'une opération de l'esprit comme existant *à priori*.

Ce qu'il n'est pas permis de faire, c'est de fixer sa pensée, soit sur un terme, soit sur un autre de la série, et de considérer ce terme, quel qu'il soit, comme étant le dernier : évidemment, aucun de ces termes n'exprime la mesure de la grandeur qui doit être représentée par leur limite ; aucun d'eux ne jouit de la propriété que son carré soit égal à 2 ; aucun d'eux ne saurait être assimilé à $\sqrt{2}$. Croire que la définition d'une racine, comme limite, repose sur des données expérimentales, plus positives et plus certaines que celles de l'esprit, est donc une erreur complète.

Il ne faut pas se dissimuler, d'ailleurs, le peu de ressource qu'offre l'expérience dans une pareille question. L'expérience ne donne ni un point, ni une ligne, ni une surface, ni aucune figure géométrique ; elle ne nous présente que des corps. Comme ces corps sont nécessairement terminés, sans quoi ils ne seraient pas distincts de l'espace indéfini, nous concluons que leurs limites existent, et nous appelons ces limites surfaces ; mais c'est en vertu d'une opération de l'esprit, c'est-à-dire d'une abstraction, que nous affirmons leur existence mathématique. Ces surfaces elles-mêmes ont des limites, que nous concevons et que nous nommons *lignes ;* enfin, ces lignes elles-mêmes ont des limites, que nous appelons

points. Mais, l'œil de l'homme n'a jamais vu un point, ni une ligne, ni une surface géométrique, pas plus que la limite vers laquelle tendent les nombres fractionnaires dont les carrés ont eux-mêmes pour limite le nombre 2.

L'existence de cette limite et de ces figures, toute incontestable qu'elle est, nous est donc uniquement démontrée comme résultat d'une opération de l'esprit, et nullement comme donnée expérimentale. L'application du calcul ou d'un instrument à la mesure de ces grandeurs, et à la recherche de cette limite, est un moyen d'en matérialiser les propriétés, de les faire passer sous les sens, de les rendre en quelque sorte tangibles. Mais, tandis que, par la pensée, nous concevons facilement et pleinement l'existence de ces grandeurs et de leurs propriétés mathématiques, nous ne pouvons espérer de les représenter, par le calcul ou à l'aide d'un instrument, que d'une manière ordinairement imparfaite, et d'une manière exacte seulement dans des cas particuliers.

C'est donc tout à fait à tort que quelques géomètres estiment qu'il faille absolument prendre, comme point de départ d'une définition, le résultat d'un calcul ou d'une opération matérielle. Cette manière de procéder ne laisse pas que d'être rigoureuse, sans doute; mais les résultats auxquels une opération de l'esprit nous conduit, en partant de l'expérience, sont aussi vrais, aussi certains, aussi indiscutables que les résultats de l'expérience même, et en outre, ils ont un caractère de simplicité et de généralité, qui manque forcément aux autres, et dont la disparition engendre des difficultés incessantes et sans nombre dans l'enseignement des mathématiques.

CHAPITRE XVII

Définitions expérimentales.

Nous avons dit, dans le chapitre précédent, que l'expérience offre peu de ressources dans la question générale des définitions géométriques, et que c'est une erreur de croire que les sens seuls puissent nous fournir une bonne définition. Toutes les notions que les sens nous donnent ont besoin d'être étendues, développées et complétées, en mathématiques, par une conception pure, et il n'est pas rare de voir que les meilleurs esprits, une fois engagés dans la voie expérimentale, où tout est borné et rétréci, soient obligés, pour aller jusqu'au bout, de subir les conséquences de l'erreur qui les y a entraînés. Rien n'est plus à la mode, dans les traités modernes, que les affirmations du genre suivant :

« *On ne considère, en mathématiques, que les grandeurs dont on a défini avec précision l'égalité et l'inégalité.* »

« *Il n'est pas nécessaire de définir les grandeurs qu'on introduit dans le calcul mathématique ; il suffit d'avoir défini leur égalité et leur inégalité.* »

On comprend que la définition d'une grandeur mathématique soit chose difficile, et même impossible à faire d'une manière purement expérimentale; mais quel est l'élève de philosophie qui consentira à raisonner sur des grandeurs, sans savoir ce que c'est? quel est celui qui voudra admettre qu'une grandeur, non définie, est égale à une autre qui ne l'est pas davantage? La première phrase qui commencera par ces mots : « les deux *grandeurs* sont dites égales, etc. » contiendra pour lui une pétition de principe inexplicable et des plus choquantes, si l'on n'a pas déjà posé et justifié la définition de ces deux grandeurs.

Voici un traité d'arithmétique, où l'on trouve à six pages de distance les deux définitions suivantes:

« *On appelle racine carrée d'un nombre un nombre qui élevé au carré reproduit le nombre proposé.* »

« *Chacun des nombres fractionnaires qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on veut, et dont les carrés comprenant A est ce que l'on appelle la racine carrée de A ; on le désigne par le symbole* $\sqrt{A}$. »

Quelle est la bonne? Un nombre qui représente l'évaluation approchée d'une grandeur, ne peut pas être pris, sans erreur, pour celui qui exprime la mesure exacte de cette grandeur. Evidemment, on joue ici sur les mots, en cherchant à identifier une sorte d'égalité par approximation avec l'égalité absolue: l'une de ces égalités est théorique, mais vraie; l'autre est expérimentale et fausse.

On rencontre aussi, au début d'un traité d'algèbre, cette définition générale du nombre incommensurable :

« *Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un nombre incommensurable.* »

On ne fera jamais croire à personne qu'un nombre fractionnaire, quel qu'il soit, puisse s'appeler incommensurable, à moins d'une parfaite contradiction, et le contraire d'une pareille proposition est aussi rigoureusement vrai que la proposition même. On devine, il est vrai, que l'auteur a en vue de considérer seulement la *limite* dont il ne fait pas mention, et vers laquelle tend le nombre fractionnaire dont il parle. Mais, une semblable définition ressemble trop à un rébus, pour être acceptée en ces termes dans l'enseignement élémentaire.

Dans un *Précis d'arithmétique*, on peut lire la définition suivante de la mesure d'une grandeur :

« *Mesurer une grandeur, c'est chercher de quelle manière elle est composée avec son unité; en d'autres termes, c'est chercher combien il faut ajouter d'unités ou de parties déterminées de l'unité pour reproduire cette grandeur.* »

Cette définition est incomplète, car l'auteur a démontré auparavant, comme nous l'avons fait (chap. XIV), qu'il peut se présenter trois cas distincts dans la mesure d'une grandeur, et sa définition n'en comprend que deux.

Les ouvrages modernes, du moins ceux qui se voient dans les bibliothèques de collége, renferment un très-grand nombre de définitions expérimentales de ce genre, où les auteurs, sous prétexte d'excessive rigueur, arrivent à formuler, en tourmentant la langue française, deux difficultés au lieu d'une. Il serait bien préférable, pour les progrès de l'enseignement, que les hommes distingués qui s'occupent d'écrire les éléments des sciences, apportassent toutes leurs préoccupations à suivre l'ordre logique des idées, et laissassent de côté les tours

de force pour ne poser d'abord que des définitions simples, générales, accessibles à tout le monde, sauf à les préciser dans un traité à part, par quelque développement ingénieux et même paradoxal, si cela leur plaît.

CHAPITRE XVIII

Définition des opérations de l'Arithmétique.

Le but de ce chapitre est d'examiner si l'on peut trouver, pour chaque opération de l'Arithmétique, une définition précise qui satisfasse à toutes les conditions générales et particulières d'une bonne définition, et de formuler cette définition.

Nous nommerons opération d'arithmétique toute combinaison de nombres, dont l'existence aura été démontrée comme possible et unique, et nous entendrons par nombre l'expression du résultat de la comparaison, sous le rapport de la quantité, d'une grandeur avec l'unité de même espèce (chap. XIV).

Rappelons d'abord que l'apparition d'un nombre, d'après sa définition même, suppose déjà l'existence d'une grandeur mathématique soumise à une opération simple, qu'on nomme sa mesure. S'il n'y avait pas de grandeurs mathématiques, il n'y aurait pas de nombres, même pour le savant, tandis que les grandeurs mathématiques existent même pour celui qui n'a pas l'idée de nombre. L'emploi des nombres tire principalement son utilité de ce que ceux-ci ne conservent pas la trace des

grandeurs qui leur ont donné naissance; d'où il résulte que les combinaisons qu'on peut en faire, et les conséquences qu'on tire de leurs combinaisons, ont un certain degré de généralité, qui permet de les appliquer à toutes les espèces de grandeurs et que ne sauraient avoir les opérations effectuées directement sur les grandeurs mêmes.

On est ainsi conduit à regarder une combinaison de nombres ou opération arithmétique comme l'image fidèle, mais incolore, d'une opération correspondante sur les grandeurs; et, par contre, puisque toute trace de l'espèce des grandeurs a disparu dans le nombre, il est permis de supposer que cette espèce est celle qu'on veut, et, en particulier, que ces grandeurs sont des lignes. D'où l'on tire cette double conclusion incontestable, savoir: 1° tous les nombres arithmétiques, incommensurables ou non, peuvent être censés représenter des longueurs portées sur une même droite, à partir du même point et dans la même direction; 2° toute opération arithmétique est, si l'on peut s'exprimer ainsi, la photographie d'une construction géométrique, exécutée sur des lignes.

La définition d'une opération arithmétique a donc pour objet de faire connaître et de fixer par un mot le résultat d'une combinaison de nombres, c'est-à-dire d'une construction géométrique. On voit par là qu'il y a pour chaque opération deux modes de définition, qu'on distingue quelquefois et très-improprement par les épithètes d'*abstrait* et de *concret*, et qu'on devrait plutôt nommer *arithmétique* et *géométrique*.

Le mode abstrait ou arithmétique, est celui dans lequel on fait porter la définition sur les nombres, tels qu'ils se rencontrent dans la pratique du calcul, c'est-à-dire abs-

traction faite de l'espèce de grandeurs qu'ils représentent et de la position relative de ces grandeurs; cette manière de procéder est nécessairement particulière et incomplète, car elle suppose que les nombres sont considérés uniquement sous le rapport de la quantité.

Au contraire, dans le mode géométrique ou concret, la définition prend naissance sur des lignes, qui remplacent figurativement toute espèce de grandeurs; rien n'empêche qu'on ne puisse tenir compte et de la quantité et de la position relative de ces lignes, non-seulement dans un sens, mais encore dans le sens opposé et même dans une multitude de directions intermédiaires; la définition géométrique d'une opération, outre qu'elle est plus saisissante, plus naturelle et plus simple que l'autre, est donc la seule qui soit *à priori* susceptible de généralisation.

En suivant cet ordre d'idées, il est très-facile d'entendre les termes de *quantités algébriques* et de *quantités complexes*, que quelques géomètres modernes ont introduit dans le calcul. Ces termes n'ont rien d'absolu; mais, de même qu'on rattache successivement au mot nombre, sous le rapport de la quantité, des idées de plus en plus générales, que rappellent les épithètes d'entier, de fractionnaire et d'incommensurable, de même il est permis de généraliser aussi l'expression de nombre, lorsqu'on le considère sous le rapport de la direction. Les nombres se présentent d'abord comme quantités *arithmétiques,* c'est-à-dire essentiellement positives, puis comme quantités *algébriques*, c'est-à-dire positives ou négatives, et enfin comme quantités *dirigées* ou *inclinées* dans tous les sens; c'est cette dernière manière d'être qu'on doit entendre par le terme de *quantités complexes*.

L'idée de direction attachée au mot nombre sert ainsi

de ligne de démarcation entre l'arithmétique et l'algèbre : l'arithmétique se compose de faits relatifs aux nombres, car les nombres n'y sont jamais combinés autrement que sous le rapport de la quantité ; l'algèbre, au contraire, envisageant les nombres sous le double rapport de la quantité et de la direction, exprime les lois générales de leurs combinaisons. Et l'on ne peut s'empêcher de croire que telle était la pensée de Newton, lorsqu'il choisissait pour titre de son traité d'algèbre, celui d'*Arithmétique générale* ou *universelle*.

L'opération fondamentale de l'arithmétique est l'addition : on peut dire qu'elle consiste à former un nombre renfermant toutes les unités et parties aliquotes d'unité, qu'on peut trouver dans plusieurs nombres donnés. Si les nombres donnés sont entiers ou fractionnaires, on ne saurait élever d'objection contre la possibilité de former un pareil nombre. Si l'un des nombres donnés est incommensurable, comme $\sqrt{2}$, ou si tous sont incommensurables, nous avons vu comment on doit considérer, dans la pratique, la composition du nombre $\sqrt{2}$ relativement à l'unité (chap. XV); d'après cela, il sera possible de former un nombre renfermant toutes les unités et parties aliquotes d'unité qu'on sait trouver successivement dans des nombres donnés, entiers, fractionnaires ou incommensurables. Que si nous voulons indiquer la limite exacte du résultat de l'addition des nombres 3 et $\sqrt{2}$, laquelle ne peut pas s'exprimer par un nombre commensurable, nous écrirons $3 + \sqrt{2}$. Telle est la *somme* de ces nombres.

La soustraction se ramène à l'addition dont elle est l'inverse.

La multiplication par un nombre entier est un cas particulier de l'addition, celui où les nombres additionnés

sont égaux entre eux. De la multiplication par un nombre entier, on peut passer à la division par un nombre entier, en disant que, diviser un nombre par un autre, c'est *partager le premier en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le second,* ce qui est toujours possible, en vertu de la continuité des grandeurs que les nombres représentent. On définit ensuite la multiplication par un nombre fractionnaire ou incommensurable, à l'aide des deux définitions précédentes, savoir : *multiplier un nombre quelconque par un autre, c'est en former un troisième qui soit composé avec le multiplicande absolument comme le multiplicateur l'est avec l'unité.*

Dans le cas où le multiplicateur est fractionnaire, on reconnaît aisément la justesse de cette définition, qui comprend comme cas particulier, celle qu'on a déjà donnée spécialement pour les nombres entiers. Si le multiplicateur est incommensurable, comme $\sqrt{2}$, on sait comment il faut considérer, dans la pratique, la composition du nombre $\sqrt{2}$ relativement à l'unité (chap. XV); on saura donc former un nombre renfermant autant de parties aliquotes du nombre 3, par exemple, que l'on peut trouver successivement de parties aliquotes de l'unité dans $\sqrt{2}$. Que si nous voulons indiquer la limite exacte du résultat de la multiplication des nombres 3 et $\sqrt{2}$, laquelle ne peut pas s'exprimer par un nombre commensurable, nous écrirons $3 \times \sqrt{2}$. Tel est le produit de ces nombres.

La définition générale du produit de deux nombres entraîne celle de la division, qui est l'inverse de la multiplication; d'ailleurs, l'élévation d'un nombre à ses puissances entières n'est qu'un cas particulier de la multiplication, et l'extraction des racines l'inverse de

l'élévation aux puissances. D'un autre côté, on peut toujours se proposer de satisfaire aux deux questions suivantes : 1° *étant donnés deux nombres, en trouver un troisième qui multiplié par le second reproduise le premier ; 2° étant donné un nombre, en trouver un second qui élevé à une certaine puissance reproduise le premier*. Il résulte, en effet, de la continuité des grandeurs mathématiques, que le nombre cherché dans l'une et l'autre opération existe et est unique, ce qui suffit à la justification de ces deux définitions (chap. XV).

Toutes les opérations de l'Arithmétique peuvent donc être définies, d'une manière abstraite, comme il suit :

ADDITIONNER plusieurs nombres, c'est en former un autre, qui contienne toutes les unités et parties aliquotes d'unité qu'on peut trouver dans les nombres donnés.

SOUSTRAIRE un nombre d'un autre, c'est en trouver un troisième, qui ajouté au second donne une somme égale au premier.

MULTIPLIER un nombre par un autre, c'est en former un troisième, qui soit composé avec le premier absolument comme le second l'est avec l'unité.

DIVISER un nombre par un autre, c'est en trouver un troisième, qui multiplié par le second donne un produit égal au premier.

EXTRAIRE la racine d'un nombre, c'est en trouver un autre, qui élevé à une certaine puissance donne un résultat égal au premier.

Les définitions qui précèdent reposent chacune sur un principe. évident ou démontré, et sur la composition d'un nombre quelconque relativement à l'unité ; elles sont donc toutes, au point de vue purement arithmétique, rigoureuses et générales, attendu qu'elles conviennent à toute

espèce de nombres, sous le rapport de la quantité, et possèdent les qualités générales et particulières d'une bonne définition géométrique. Bien plus, si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut sur l'expression géométrique du nombre, et si, en se conformant au principe de chaque opération, on interprète mot à mot leur signification, on obtiendra sans peine les définitions géométriques ou concrètes des opérations arithmétiques.

Par exemple, pour faire l'addition de deux longueurs, on les portera sur la même droite, l'une à la suite de l'autre : leur *somme* est la distance des deux extrémités non communes.

Pour faire la soustraction de deux longueurs, on les portera sur la même droite, à partir du même point : leur *différence* est la distance des deux extrémités non communes.

La *multiplication* de deux nombres sera représentée par la construction d'une quatrième proportionnelle à trois lignes ; on voit, en effet, si l'on pose l'égalité :

$$x = ab,$$

qu'on peut l'écrire sous forme de proportion de la manière suivante :

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{x}.$$

Or, cette proportion exprime précisément que x est une quatrième proportionnelle aux trois lignes : 1, a et b.

La *division* de deux nombres s'effectue aussi par la construction d'une quatrième proportionnelle; car, le quotient $\frac{a}{b}$ étant désigné par x, on pourra déterminer x par la proportion :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x}.$$

L'*élévation* aux puissances entières se ramène à plusieurs constructions successives de quatrième et troisième proportionnelles.

L'*extraction* de la racine carrée d'un nombre correspond à la construction d'une moyenne proportionnelle entre l'unité et le nombre donné ; car l'égalité $x = \sqrt{a}$ peut évidemment s'écrire, comme on le sait :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{a}.$$

Les racines, dont le degré est une puissance de 2, peuvent s'extraire par plusieurs constructions successives de moyennes proportionnelles. Quant à celles dont le degré n'est pas une puissance de 2, on peut toujours les trouver approximativement, dans la pratique, avec la règle et le compas, et exactement, en théorie, au moyen de l'instrument imaginé par Descartes.

Telles sont les constructions géométriques propres à représenter les opérations élémentaires de l'arithmétique. Ce qui est vraiment remarquable, c'est que chacune d'elles est susceptible d'être généralisée, c'est-à-dire étendue à des lignes représentant des nombres avec toutes les qualités comprises sous les termes de *quantités algébriques*, et de *quantités complexes* (1). Mais, cette extension n'est point passée dans l'enseignement classique des lycées de France ; ni dans les examens qui ont pour but l'obtention d'un grade universitaire, ni dans les examens d'admission aux différentes écoles du gouvernement, ces définitions généralisées ne sont encore acceptées sans difficulté. Il y a plus de 20 ans qu'elles ont

(1) Voy. à ce sujet les *Mémoires* de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux (1er cahier, 1867).

reçu leur droit de cité dans les écoles de Belgique et d'Allemagne, sans qu'on ait osé les introduire dans les programmes officiels de l'Empire français.

L'historique de ces définitions nous offre cependant en leur faveur, et sans sortir de France, le témoignage de plusieurs savants de premier ordre.

En 1637, Descartes posa les premiers fondements de la signification géométrique des quantités négatives.

Après lui, d'Alembert essaya, dans l'*Encyclopédie* du XVIII[e] siècle d'interpréter dans le même sens les quantités imaginaires.

En 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.*

Vers l'année 1813, le même Argand réclame, dans les *Annales de Gergonne* (tome IV), contre un professeur de l'Ecole d'artillerie à Metz, nommé J.-F. Français, la priorité de sa découverte.

Mourey, en 1828, publia une brochure ayant pour titre : *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédié aux amis de l'évidence.*

Ces diverses théories ont été reprises et coordonnées par l'illustre Cauchy, dans ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique.*

Sous le règne de Louis-Philippe, un professeur obscur d'un collége communal, M. Faure, publia un petit ouvrage très-remarquable, intitulé : *Théorie des quantités imaginaires.* J'ai entendu raconter que l'année suivante, les inspecteurs généraux de l'Université déclarèrent que ce professeur était fou, et obtinrent sa mise à la retraite. Ajoutons, pour être juste, que la pension de retraite du

pauvre professeur a été augmentée, depuis cette époque, et que les distinctions les plus honorables ont été accordées sous forme de réparation à ce savant méconnu.

Depuis 15 ans, plusieurs mémoires ont été lus sur la question, par M. Abel Transon, examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique, dans les séances de la *Société philomatique de Paris*, et d'autres, imprimés par lui, dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (années 1868-69, décemb., janv., fév., etc.).

Enfin, M. J. Houël, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux, publie en ce moment même, sous le titre de *Théorie élémentaire des quantités complexes*, une étude des plus approfondies et des plus savantes de la question.

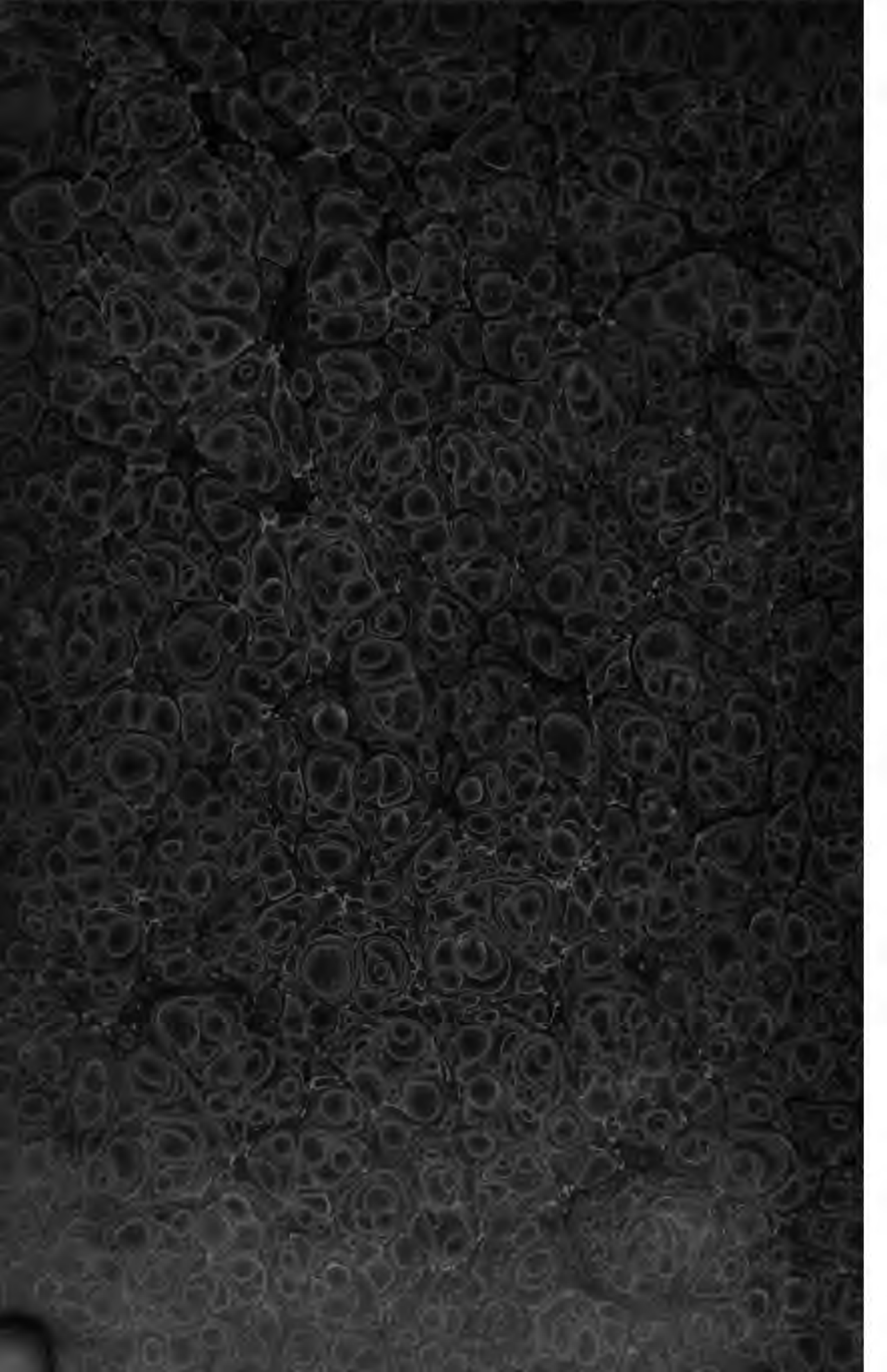
Malgré toutes ces autorités, le droit d'étendre les définitions arithmétiques aux quantités négatives et imaginaires reste encore, par routine ou par frayeur, contesté de la part de plusieurs géomètres français. Mais la routine finira, soyons-en sûrs, par être vaincue; la peur cèdera à l'évidence, et, sans être prophète, nous pouvons prédire que, dans un prochain avenir, le fantôme des imaginaires aura disparu des écoles françaises, comme autrefois les loups furent chassés d'Angleterre.

FIN DES DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

TABLE DES MATIÈRES

Lyon — Imp. du Salut Public. — BELLON, rue Impériale, 33.

23356





Math 5038.70
Essai sur les definitions geomet
Cabot Science 003330444
3 2044 091 901 926